

Máster Interuniversitario en Estadística e Investigación Operativa UPC-UB

Título: Estimación de modelos de mortalidad estocástica edad-periodo-cohorte generalizados con datos de la población de Chile.

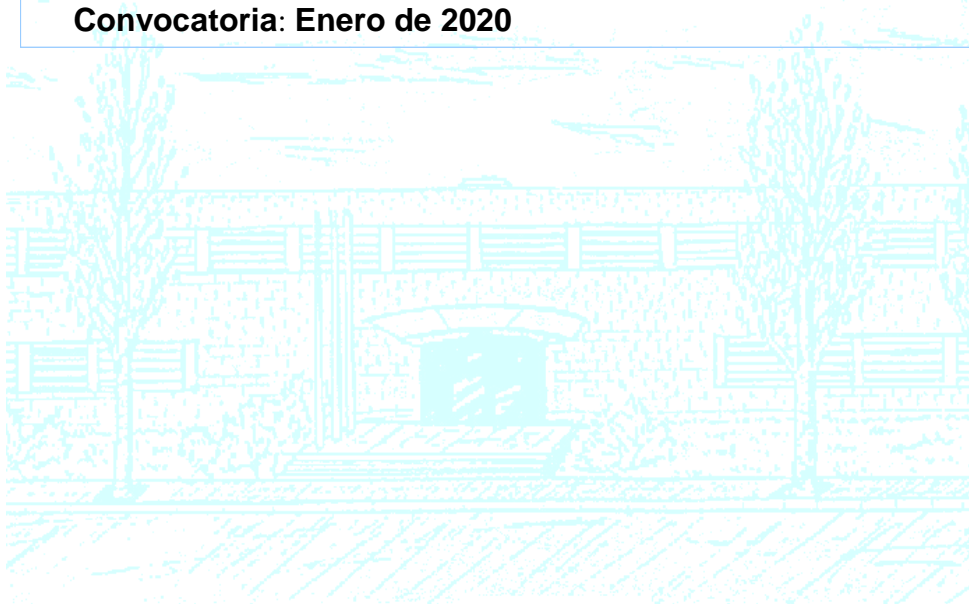
Autor: Pablo Andrés Moyano Silva

Directores: Ana María Pérez Marín
Miguel Angel Santolino Prieto

Departamento: Departamento de Econometría, Estadística y Economía Aplicada

Universidad: Universidad de Barcelona

Convocatoria: Enero de 2020



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Facultat de Matemàtiques i Estadística



UNIVERSITAT DE BARCELONA

**ESTIMACIÓN DE MODELOS DE MORTALIDAD
ESTOCÁSTICA EDAD-PERÍODO-COHORTE
GENERALIZADOS CON DATOS DE LA POBLACIÓN
DE CHILE**

PABLO ANDRÉS MOYANO SILVA

Directores:

Ana María Pérez Marín

Miguel Angel Santolino Prieto

Tesis de Máster

Barcelona
2020

Dedicada a mi amada familia
Consuelo y Joaquín

AGRADECIMIENTOS

A mis profesores tutores Ana María Pérez Marín y Miguel Angel Santolino Prieto, por su destreza y empeño para dirigir mi trabajo, y por darme la valiosa oportunidad de explorar, aunque sea de forma muy humilde, en el quehacer académico.

A mis profesores del MESIO UPC-UB, al personal administrativo de la Facultad de Matemáticas y Estadísticas de la UPC y a mis compañeros del máster, todos ellos contribuyeron a que este proceso fuera una experiencia muy enriquecedora y por cierto agradable.

Al Programa de Formación de Capital Humano Avanzado de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile por financiar mis estudios.

A Consuelo, mi compañera de vida, que gracias a su continuo apoyo, paciencia y tenacidad he llegado a escribir estas líneas. Junto a ella codo a codo somos mucho más que dos.

A Joaquín rival del sol, mi hijo, él es la alegría de nuestros días, y desde que nos acompaña es la gran motivación para todo lo que hacemos.

RESUMEN

En este trabajo se estiman los modelos de Lee-Carter, Renshaw-Haberman y Cairns-Blake-Dowd expuestos en el marco de modelos de mortalidad estocástica edad-periodo-cohorte generalizados, con los datos de mortalidad de Chile, para determinar qué modelo sería el más adecuado para describir el comportamiento y la evolución de la mortalidad de la población de Chile.

Se han comparado las estimaciones realizadas mediante análisis de residuos y las medidas de bondad de ajuste AIC y BIC. Además se han comparado midiendo el error entre el número de muertes observadas y estimadas, y también se compararon los pronósticos generados por los modelos.

Se ha constatado que el modelo de Renshaw-Haberman es el que logra un mejor ajuste de los datos observados, pero es menos útil para pronosticar. Por lo tanto, considerando el desempeño tanto para describir el pasado como para generar pronósticos, y también por su simplicidad, se concluye que para los datos utilizados en este trabajo el modelo de Lee-Carter, asumiendo que el número de muertes sigue una distribución Binomial, es el más adecuado para describir el comportamiento y la evolución de la mortalidad de la población en Chile.

Con los pronósticos se han construido tablas de mortalidad, las que se han empleado para calcular primas en seguros de vida, en base a dos escenarios hipotéticos. Estas primas estimadas se compararon a su vez con las obtenidas utilizando la tabla de mortalidad M95, que es la tabla de mortalidad publicada por el ente regulador de Chile. Se ha concluido que las tablas M95 parecen adecuadas para garantizar la solvencia de las entidades aseguradoras, en cuanto a posibles desviaciones en el riesgo de fallecimiento.

ABSTRACT

In this paper, the Lee-Carter, Renshaw-Haberman and Cairns-Blake-Dowd models exposed in the framework of generalized age-period-cohort stochastic mortality models are estimated with Chilean mortality data, in order to determine which model would be the most appropriate to describe the behavior and evolution of the mortality of the Chilean population.

The estimates have been compared by residue analysis and the AIC and BIC goodness of fit measures. They have also been compared by measuring the error between the number of deaths observed and estimated. Moreover, the forecasts generated by the models were also compared.

It has been found that the Renshaw-Haberman model is the one that achieves a better adjustment of the observed data but is less useful for predicting. Therefore, considering the performance both to describe the past and to generate forecasts, and also due to its simplicity, it is concluded that for the data used in this paper, the Lee-Carter model, assuming that the number of deaths follows a Binomial distribution, is the best suited to describe the behavior and evolution of the population's mortality in Chile.

Mortality tables have been prepared with the forecasts, which have been used to calculate life insurance premiums, based on two hypothetical scenarios. These estimated premiums were in turn compared to those obtained using the M95 mortality table, which is the mortality table published by the Chilean regulatory body. It has been concluded that the M95 tables seem adequate to guarantee the solvency of the insurance companies, regarding possible deviations in the risk of death.

Tabla de Contenidos

1	Introducción	1
2	Modelos de mortalidad estocástica GAPC	3
2.1	Notación	3
2.2	Modelos de mortalidad estocástica GAPC	5
2.2.1	Pronósticos con modelos de mortalidad estocástica GAPC	7
2.3	Modelo Lee-Carter bajo entorno de los modelos GAPC	8
2.4	Modelo Renshaw-Haberman bajo entorno de los modelos GAPC	10
2.5	Modelo Cairns-Blake-Dowd (CBD) bajo entorno de los modelos GAPC	11
3	Estimación de modelos	12
3.1	Datos de mortalidad de Chile	12
3.2	Estimación modelo de Lee-Carter	14
3.2.1	Estimación modelo original de Lee-Carter	14
3.2.2	Estimación modelo de Lee-Carter con entorno GAPC	17
3.3	Estimación modelo de Renshaw-Haberman	22
3.4	Estimación modelo de Cairns-Blake-Dowd	26
3.5	Comparación entre modelos estimados	30
4	Pronósticos de tasas de mortalidad	33
4.1	Pronósticos modelo de Lee-Carter	33
4.2	Pronósticos modelo de Renshaw-Haberman	35
4.3	Desempeño de los modelos según sus pronósticos	37

5	Aplicación en Seguros de Vida	39
5.1	Tablas de mortalidad	39
5.2	Cálculo de primas puras	43
6	Conclusiones	45
A	Tablas de mortalidad utilizadas para comparar pronósticos en sección 4.3	50
B	Tablas de mortalidad M95	59
C	Códigos de R	61

Capítulo 1

Introducción

En las últimas décadas se ha constatado un progresivo aumento en la esperanza de vida de la población. En Chile la esperanza de vida al nacer en 1982 era de 67 años para los hombres y de 74 años para las mujeres, mientras que en 2010 este indicador era de 75 años para los hombres y de 81 años para las mujeres.¹

Si bien estos datos representan un logro social y una buena noticia para las personas, plantea sin embargo diversos desafíos para la planificación de los sistemas de seguridad social y para las compañías privadas de seguros. Por ejemplo, el cálculo de las reservas técnicas necesarias para no poner en riesgo la solvencia de las compañías de seguros, el cálculo de primas en seguros de vida, los montos de las rentas vitalicias, así como también, y esto para el caso particular de Chile, la definición de cantidades monetarias en políticas sociales como el aporte previsional solidario, requieren de un conocimiento adecuado de los niveles de mortalidad de la población.

Así, en consideración a estos desafíos causados por el envejecimiento de la población, los actuarios han dedicado especial atención al desarrollo de técnicas estadísticas para modelar y proyectar las tasas de mortalidad.

En este trabajo utilizamos datos de mortalidad de la población de Chile y aplicamos la familia de

¹Datos del Instituto Nacional de Estadísticas de Chile, <https://www.ine.cl/ine-ciudadano/definiciones-estadisticas/poblacion/esperanza-de-vida>

modelos de mortalidad estocástica edad-periodo-cohorte generalizados definidos en Villegas et al. (2017) para modelizar la evolución de la mortalidad de Chile. En particular, trabajamos con los modelos de Lee-Carter, Renshaw-Haberman y Cairns-Blake-Dowd que han sido utilizados en diversos estudios.

El modelo de Lee-Carter es un modelo de mortalidad estocástica que extrapola hacia el futuro la mortalidad estimada a partir de datos históricos y que destaca por su sencillez. El modelo de Renshaw-Haberman extiende el modelo de Lee-Carter e incorpora un parámetro para capturar el efecto de la cohorte y el modelo de Cairns-Blake-Dowd, a diferencia de los modelos mencionados, utiliza dos factores temporales para describir la tendencia de la mortalidad.

Además, en este trabajo utilizamos los pronósticos de las tasas de mortalidad de la población de Chile obtenidas mediante estos modelos, para estimar primas de seguros de vida en dos escenarios hipotéticos y compararlas con las primas calculadas mediante las tablas de mortalidad actualmente empleadas por las compañías de seguro en Chile.

Este trabajo se desarrolla de la siguiente manera: en el siguiente capítulo se describe el marco teórico de la familia de modelos de mortalidad estocástica edad-periodo-cohorte generalizados, para luego en el capítulo 3 presentar los resultados de las estimaciones de los modelos y compararlos en función de la diferencia entre el número de muertes observadas y estimadas. En el capítulo 4 se generan pronósticos de tasas de mortalidad, en el capítulo 5 se presenta una aplicación en seguros de vida y finalmente en el capítulo 6 se entregan las principales conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2

Modelos de mortalidad estocástica GAPC

2.1 Notación

Las hipótesis, definiciones y notaciones que utilizaremos en adelante son las utilizadas en la bibliografía de ciencias actuariales (ver por ejemplo Ayuso et al. (2007)).

Asumimos que los individuos forman un grupo homogéneo, en el sentido de que el comportamiento estadístico de su edad de fallecimiento es idéntico. Esto nos permite estudiar el comportamiento probabilístico de un individuo genérico, y obtener conclusiones para todo el grupo. Cuando ésta hipótesis no resulta aceptable, se divide a los individuos en grupos cuya homogeneidad no sea puesta en duda.

Suponemos que las variables que describen las edades de fallecimiento de los individuos son estadísticamente independientes. Esto implica que las probabilidades para la edad de fallecimiento de un individuo no dependen de la edad de fallecimiento de otro individuo.

El subíndice x hace referencia a la edad, y el subíndice t al año calendario. De este modo, la variable aleatoria D_{xt} denota el número de muertes en una población de edad x en el año calendario t . El número observado de fallecimientos se representa como d_{xt} .

La probabilidad de fallecimiento a un horizonte temporal de un año, para un individuo de edad x en el año calendario t se expresa q_{xt} .

La fuerza de la mortalidad o tanto instantáneo de fallecimiento, para un individuo de edad x en el año calendario t , es μ_{xt} y se define como

$$\mu_{xt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h q_{xt}}{h}$$

donde $h q_{xt}$ es la probabilidad de fallecimiento a un horizonte temporal h . Así, para un h pequeño, la probabilidad de fallecer de este individuo entre el periodo t y $t + h$ es aproximadamente $\mu_{xt} \cdot h$.

La función censal de supervivencia L_{xt} calcula el promedio de individuos vivos a lo largo de la edad x en el año calendario t . Observamos que no todos los individuos que cumplen una edad x pueden considerarse vivos a esa edad ya que algunos morirán en el transcurso del año. Usualmente L_{xt} se estima como la población viva a la mitad del año calendario.

Algunos trabajos se refieren a L_{xt} como la exposición central al riesgo, que se denota E_{xt}^c (Macias and Santolino, 2018). En adelante seguiremos con esta nomenclatura. E_{xt}^0 corresponde a la exposición inicial al riesgo, que es la cantidad de individuos de edad x al inicio del año calendario t .

Cuando solo hay exposiciones centrales disponibles y se requieren exposiciones iniciales (o viceversa), se puede aproximar

$$E_{xt}^0 \approx E_{xt}^c + \frac{1}{2} d_{xt}$$

La probabilidad de fallecimiento a un horizonte temporal de un año puede estimarse como $\hat{q}_{xt} = d_{xt}/E_{xt}^0$.

La tasa central de mortalidad se denota por m_{xt} , y es la razón entre el número de fallecimientos de edad x y la población viva de edad x a la mitad del año calendario t , así puede estimarse como $\hat{m}_{xt} = d_{xt}/E_{xt}^c$.

Suponemos que la fuerza de mortalidad es constante para cada edad y año calendario, es decir, μ_{xt} es constante de la edad x a la edad $x + 1$ y en el año t al año $t + 1$, entonces bajo este supuesto la fuerza de la mortalidad μ_{xt} coincide con la tasa central de mortalidad m_{xt} .

En este trabajo utilizamos el paquete StMoMo de R el cual requiere que el número observado de muertes d_{xt} , y ya sea las exposiciones centrales al riesgo E_{xt} o las exposiciones iniciales E_{xt}^0 , estén disponibles en un formato de matriz que comprende edades $x = x_1, x_2, \dots, x_k$ en las filas y años calendario $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ en las columnas. El paquete StMoMo está disponible en <http://cran.r-project.org/package=StMoMo>.

Escribimos las edades y los años calendarios de forma genérica $x = x_1, x_2, \dots, x_k$, $t = t_1, t_2, \dots, t_n$, pues éstas se pueden ordenar de distinta forma. Es usual en los estudios disponer las edades agrupadas en formato 0, 1–4, 5–9, ..., 75–79, 80+ y años calendarios en quinquenios. Acá trabajaremos con x y t no agrupados.

2.2 Modelos de mortalidad estocástica GAPC

En Currie (2016) se muestra que los modelos de mortalidad más utilizados en la actualidad pueden expresarse utilizando la estructura de modelos (no)lineales generalizados, y en esta línea Villegas et al. (2017) define la familia de modelos de mortalidad estocástica edad-periodo-cohorte generalizados (GAPC por sus siglas en inglés).

A diferencia de los modelos lineales ordinarios que suponen que el error tiene distribución normal, en los modelos (no)lineales generalizados se utilizan distribuciones pertenecientes a la familia exponencial (Normal, exponencial, Binomial, Poisson, Gamma, entre otras). En los modelos GAPC se utilizan la distribución Binomial y Poisson.

En los modelos lineales ordinarios la media de la variable dependiente es una función lineal de las variables explicativas, mientras que en los modelos (no)lineales generalizados es alguna transformación monótona de la media de la variable dependiente la que es una función lineal de las variables

explicativas. En los modelos GAPC se utiliza esto y además se introduce un conjunto de restricciones para garantizar una estimación única. Formalmente, un modelo de mortalidad estocástica GAPC consta de cuatro componentes:

Componente aleatorio: El número de muertes D_{xt} sigue una distribución Poisson con tasa $E_{xt}^c \mu_{xt}$

$$D_{xt} \sim \text{Poisson}(E_{xt}^c \mu_{xt})$$

o sigue una distribución Binomial con parámetros E_{xt}^0, q_{xt}

$$D_{xt} \sim \text{Binomial}(E_{xt}^0, q_{xt})$$

donde $\mathbb{E}(D_{xt}/E_{xt}^c) = \mu_{xt}$ y $\mathbb{E}(D_{xt}/E_{xt}^0) = q_{xt}$ respectivamente.

Componente sistemático: El predictor lineal η_{xt} dado por:

$$\eta_{xt} = \alpha_x + \sum_{i=1}^N \beta_x^{(i)} k_t^{(i)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{t-x}$$

recoge los efectos de la edad x , del año calendario t y de la cohorte $c = t - x$, donde α_x es una función que depende de la edad y que captura la forma general de la mortalidad, $N \geq 0$ es un entero que indica el número de tramos de edad utilizados para describir la tendencia de la mortalidad, $k_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$ son los efectos de periodo que contribuyen a especificar la tendencia de mortalidad y $\beta_x^{(i)}$ modulando su efecto a través de las edades. El término γ_{t-x} explica el efecto de cohorte con $\beta_x^{(0)}$ modulando su efecto a través de las edades.

Los términos $\beta_x^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, N$ pueden ser funciones que dependen de la edad, o términos no paramétricos que deben estimarse. En este marco se asume que $k_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$ y γ_{t-x} son procesos estocásticos.

Componente de enlace: Una función de enlace g que relaciona la esperanza matemática de la variable dependiente con el predictor lineal, esto es

$$g\left(\mathbb{E}\left(\frac{D_{xt}}{E_{xt}^c}\right)\right) = \eta_{xt}$$

Los autores recomiendan usar las funciones de enlace canónicas, así si se considera la distribución de Poisson, g sea la función de enlace *log* y si se trabaja con la distribución Binomial g sea la función de enlace de *logit*.

Conjunto de restricciones: La mayoría de los modelos de mortalidad estocástica necesitan restricciones en los parámetros para garantizar una estimación única de los mismos. Estas restricciones se aplican a través de una función v que toma un vector arbitrario de parámetros

$$\theta := (\alpha_x, \beta_x^{(1)}, \dots, \beta_x^{(N)}, k_t^{(1)}, \dots, k_t^{(N)}, \beta_x^{(0)}, \gamma_{t-x})$$

y lo transforma en el vector

$$v(\theta) = \tilde{\theta} = (\tilde{\alpha}_x, \tilde{\beta}_x^{(1)}, \dots, \tilde{\beta}_x^{(N)}, \tilde{k}_t^{(1)}, \dots, \tilde{k}_t^{(N)}, \tilde{\beta}_x^{(0)}, \tilde{\gamma}_{t-x})$$

que satisface las restricciones del modelo sin efecto sobre el predictor η_{xt} .

2.2.1 Pronósticos con modelos de mortalidad estocástica GAPC

En los modelos de mortalidad estocástica GAPC, para generar pronósticos sobre tasas de mortalidad futura, debemos emplear la metodología de Box-Jenkins de series temporales para modelar el comportamiento de los parámetros $k_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$ y γ_{t-x} , pues proyectando los valores futuros de estos parámetros podemos pronosticar tasas de mortalidad.

En términos generales la metodología de Box-Jenkins consiste en la identificación, estimación y comprobación para encontrar un proceso ARIMA que represente el mejor ajuste de una serie temporal de valores.

Para modelar los efectos de periodo $k_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$ se consideran dos alternativas. Una manera es suponer que los efectos de periodo siguen un paseo aleatorio multivariante con constante, esto es,

$$k_t = \delta + k_{t-1} + \xi_t^k, \quad k_t = \begin{pmatrix} k_t^{(1)} \\ \vdots \\ k_t^{(N)} \end{pmatrix}, \quad \xi_t^k \sim N(0, \Sigma)$$

donde δ es un vector de dimensión N que contiene las constantes y Σ es la matriz de dimensión $N \times N$ de varianzas y covarianzas del ruido blanco multivariante ξ_t^k .

Una segunda posibilidad es asumir que cada uno de los efectos de periodo sigue un modelo ARIMA univariante, es decir, se asume que el efecto de periodo i -ésimo $k_t^{(i)}$ sigue un ARIMA(p_i, d_i, q_i) con constante,

$$\Delta^{d_i} k_t^{(i)} = \delta_0^{(i)} + \phi_1^{(i)} \Delta^{d_i} k_{t-1}^{(i)} + \cdots + \phi_{p_i}^{(i)} \Delta^{d_i} k_{t-p_i}^{(i)} + \xi_t^{(i)} + \delta_1^{(i)} \xi_{t-1}^{(i)} + \cdots + \delta_{q_i}^{(i)} \xi_{t-q_i}^{(i)}$$

donde $\Delta^{d_i} k_t^{(i)} = k_t^{(i)} - k_{t-d}^{(i)}$ es el operador de diferencias, $\delta_0^{(i)}$ es la constante, $\phi_1^{(i)}, \dots, \phi_{p_i}^{(i)}$ son los coeficientes de la parte autorregresiva con $\phi_{p_i}^{(i)} \neq 0$, $\delta_1^{(i)}, \dots, \delta_{q_i}^{(i)}$ son los coeficientes de la parte media móvil con $\delta_{q_i}^{(i)} \neq 0$ y $\xi_t^{(i)}$ es un ruido blanco gaussiano con varianza $\sigma_\xi^{(i)}$.

Por su parte, para modelar el efecto de cohorte γ_{t-x} , se asume que sigue un proceso ARIMA(p, d, q) con constante que es independiente de los efectos de periodo (Renshaw and Haberman, 2006):

$$\Delta^d \gamma_{t-x} = \delta_0 + \phi_1 \Delta^d \gamma_{t-x-1} + \cdots + \phi_p \Delta^d \gamma_{t-x-p} + \epsilon_{t-x} + \delta_1 \epsilon_{t-x-1} + \cdots + \delta_q \epsilon_{t-x-q}$$

donde ϵ_{t-x} es un ruido blanco gaussiano con varianza σ_ϵ .

La mayoría de los modelos de mortalidad estocástica propuestos en la literatura pertenecen a la familia de modelos GAPC. Esto incluye el modelo propuesto por Lee and Carter (1992), las extensiones del modelo Lee-Carter propuesto en Haberman and Renshaw (2011), así como el modelo Cairns-Blake-Dowd propuesto en Blake et al. (2006).

2.3 Modelo Lee-Carter bajo entorno de los modelos GAPC

Lee and Carter (1992) propusieron un sencillo modelo para describir la evolución de la mortalidad. Es un modelo bilineal en las variables edad (x) y año calendario (t) y se expresa de la siguiente manera:

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_t \cdot k_t + \varepsilon_{x,t}$$

donde:

- a_x es un parámetro que captura la forma general de la mortalidad por edad y es independiente del año calendario.
- b_x es un parámetro que describe la velocidad con la que varía la mortalidad a cada edad, cuando varía el nivel general de mortalidad. No depende del tiempo.
- k_t es un parámetro que depende del año calendario y refleja la tendencia de la mortalidad.
- $\varepsilon_{x,t}$ es el término de error, representa todos aquellos aspectos no capturados por el modelo.

Los autores señalaron que su modelo no queda bien definido, pues si suponemos que el vector (α, β, k_t) es una solución, entonces para toda constante c distinta de cero, $(\alpha - \beta c, \beta, k_t + c)$ y $(\alpha, \beta c, \frac{k_t}{c})$ también serán soluciones. Para obtener una única solución al sistema de ecuaciones planteado, se deben introducir las siguientes restricciones:

$$\sum_x b_x = 1 \quad \sum_t k_t = 0$$

El modelo Lee-Carter ha sido utilizado para modelizar y pronosticar la mortalidad en diversos países como, por ejemplo en Estados Unidos (Lee and Carter, 1992), Chile (Lee and Rofman, 1994), Bélgica (Brouhns et al., 2002), España (Macias and Santolino, 2018) entre otros.

El modelo Lee-Carter en el marco de los modelos GAPC fue implementado en Brouhns et al. (2002), donde asume que el número de muertes tiene distribución Poisson, con función de enlace *log* y con respecto a la fuerza de mortalidad μ_{xt} . Recordemos que el modelo propuesto por Lee-Carter supone que existe una función de edad α_x , un término único no paramétrico de periodo ($N = 1$) y sin efecto de cohorte. Así, el predictor viene dado por:

$$\eta_{xt} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} k_t^{(1)}$$

Los parámetros de la ecuación anterior pueden ser transformados de la siguiente manera:

$$(\alpha_x, \beta_x^{(1)}, k_t^{(1)}) \rightarrow \left(\alpha_x + c_1 \beta_x^{(1)}, \frac{1}{c_2} \beta_x^{(1)}, c_2 (k_t^{(1)} - c_1) \right) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$$

dejando invariante el valor de η_{xt} . Las restricciones propuestas originalmente por Lee-Carter,

$$\sum_x b_x = 1 \quad \sum_t k_t = 0$$

para asegurar la identificación de los parámetros se logra imponiendo:

$$c_1 = \frac{1}{n} \sum_t k_t^{(1)} \quad c_2 = \sum_x \beta_x^{(1)}$$

2.4 Modelo Renshaw-Haberman bajo entorno de los modelos GAPC

Renshaw and Haberman (2006) extiende el modelo original de Lee-Carter e incorpora un parámetro para capturar el efecto global de la cohorte $t - x$. El efecto de cohorte captura modificaciones en la mortalidad que una generación experimenta respecto a las generaciones previas y/o posteriores y que se prolonga a lo largo del tiempo en dicha generación. Estos cambios entre cohortes se debe a múltiples causas como pueden ser por ejemplo guerras, epidemias, mejoras en mortalidad infantil, entre otras.

En el marco de los modelos GAPC, el predictor para este modelo es

$$\eta_{xt} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} k_t^{(1)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{t-x}$$

En adelante consideramos este modelo con $\beta_x^{(0)} = 1$ pues de este modo se resuelven ciertos problemas de estabilidad que tiene el modelo general (Haberman and Renshaw, 2011). Para estimar este modelo los autores asumen que el número de muertes D_{xt} se distribuye según una Poisson y utilizan la función de enlace \log sobre el tanto instantáneo de mortalidad μ_{xt} .

El predictor queda invariante bajo la transformación de los parámetros

$$(\alpha_x, \beta_x^{(1)}, k_t^{(1)}, \gamma_{t-x}) \rightarrow \left(\alpha_x + c_1 \beta_x^{(1)} + c_2, \frac{1}{c_3} \beta_x^{(1)}, c_3 (k_t^{(1)} - c_1), \gamma_{t-x} - c_2 \right)$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0, c_3 \neq 0$. El conjunto de restricciones para los parámetros es

$$\sum_x b_x = 1 \quad \sum_t k_t^{(1)} = 0 \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0$$

que se obtiene imponiendo:

$$c_1 = \frac{1}{n} \sum_t k_t^{(1)} \quad , \quad c_2 = \frac{1}{n+k-1} \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c \quad , \quad c_3 = \sum_x \beta_x^{(1)}$$

2.5 Modelo Cairns-Blake-Dowd (CBD) bajo entorno de los modelos GAPC

Blake et al. (2006) propuso un predictor con dos tramos de edad ($N = 2$) para describir la tendencia de la mortalidad con sus respectivos efectos $k_t^{(i)}$, $i = 1, 2$, con parámetros $\beta_x^{(1)} = 1$ y $\beta_x^{(2)} = x - \bar{x}$, donde \bar{x} es el promedio de edad en los datos, sin función de edad α_x y sin efectos de cohorte γ_{t-x} . El predictor del modelo CBD es

$$\eta_{xt} = k_t^{(1)} + (x - \bar{x}) k_t^{(2)}$$

Una característica que contrasta con los modelos anteriores, es que en este modelo la edad es una variable explicativa. Este modelo no tiene problemas de identificación por lo que no requiere de un conjunto de restricciones para los parámetros.

Capítulo 3

Estimación de modelos

3.1 Datos de mortalidad de Chile

En este capítulo describiremos la mortalidad en Chile y estimaremos los modelos de Lee-Carter, Renshaw-Haberman y de Cairns-Blake-Dowd. Los datos que utilizaremos se obtuvieron desde la base de datos The Human Mortality Database (www.mortality.org) y abarcan edades entre 0 y 110 años, en el periodo de 1992 a 2008, diferenciados por sexo.

Cabe señalar que si bien la información obtenida desde The Human Mortality Database no es para años recientes, es la base de datos de acceso público que nos aporta una mayor cantidad de datos de mortalidad de la población de Chile en el formato que requerimos, esto es, que el número observado de muertes, y ya sea las exposiciones centrales o iniciales al riesgo, estén en un formato de matriz que comprende edades en las filas y años calendario en las columnas, con edades y años calendario no agrupados.

La figura 3.1 muestra el logaritmo de la tasa central de mortalidad según la edad para hombres y mujeres, entre los años 1992 y 2008. Aunque el periodo de tiempo es breve, se puede observar en ambos gráficos que la mortalidad disminuye con el paso de los años.

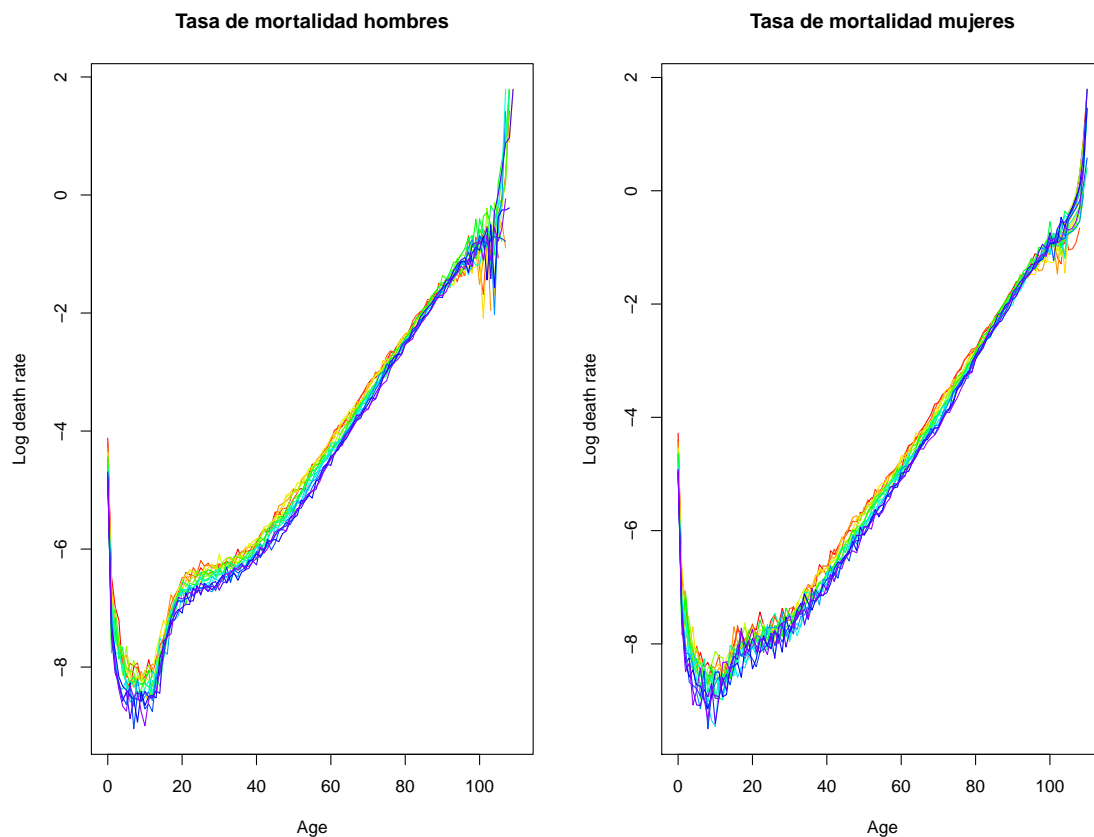


Figura 3.1: Tasa central de mortalidad para hombres y mujeres de Chile entre los años 1992 y 2008

El comportamiento de la mortalidad es parecido en ambos gráficos. En términos generales se observa una mortalidad alta en los recién nacidos, que luego cae rápidamente hasta un mínimo en torno a los 10 años, para luego volver a crecer paulatinamente. Podemos también observar una diferencia entre hombres y mujeres debido a un aumento de la mortalidad en el caso de los hombres entre los 20 y los 30 años. Esta diferencia podría ser causada por los fallecimientos en accidentes de tránsito y que se denomina como joroba de los accidentes (Debón et al., 2015).

3.2 Estimación modelo de Lee-Carter

3.2.1 Estimación modelo original de Lee-Carter

Para estimar los parámetros, los autores desarrollaron un método para minimizar el error cuadrático medio mediante la descomposición en valores singulares. Para ajustar el modelo original de Lee-Carter utilizaremos el paquete Demography de R. Si bien contamos con datos para edades entre 0 y 110 años, ajustamos los datos para edades entre 0 y 90 años pues este rango de estudio nos parece más adecuado.

La figura 3.2 presenta los parámetros que hemos estimado. Podemos apreciar que el parámetro α_x captura la forma general de la mortalidad para cada edad. Se observa una mortalidad alta al inicio de la vida, que luego cae hasta un mínimo en torno a los 15 años para luego volver a crecer. También se ve que la mortalidad de los hombre es mayor que la mortalidad de las mujeres, y la distancia es mayor entre los 20 y los 30 años, diferencia que como antes señalamos, podría ser causada por los fallecimientos en accidentes de tránsito (joroba de los accidentes).

Por su parte, el parámetro β_x es siempre positivo para ambos sexos, y tiene un comportamiento irregular en ambos casos, que probablemente se deba a que intenta capturar las desviaciones del cambio de mortalidad para cada edad y también los efectos de cohorte (Macias and Santolino, 2018). La tendencia de la mortalidad es capturada por k_t que para ambos sexos decrece, lo que indica que la mortalidad aumenta con la edad y disminuye con el tiempo calendario.

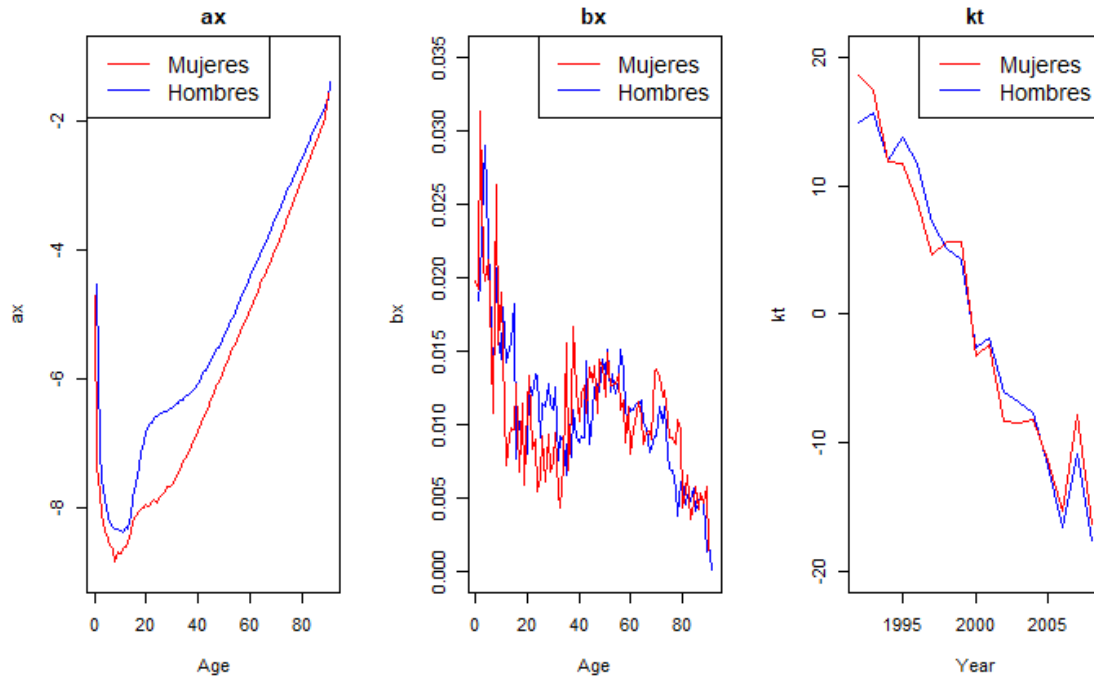


Figura 3.2: Estimación de los parámetros del modelo Lee-Carter Gaussiano

Si los residuos son independientes e idénticamente distribuidos, podemos señalar que el ajuste es adecuado. Para verificar esta condición, el paquete Demography permite generar gráficos de contornos de los residuos. En la figura 3.3 cada color representa un orden de magnitud de los residuos, y podemos ver que dichos colores no se encuentran distribuidos de forma homogénea.

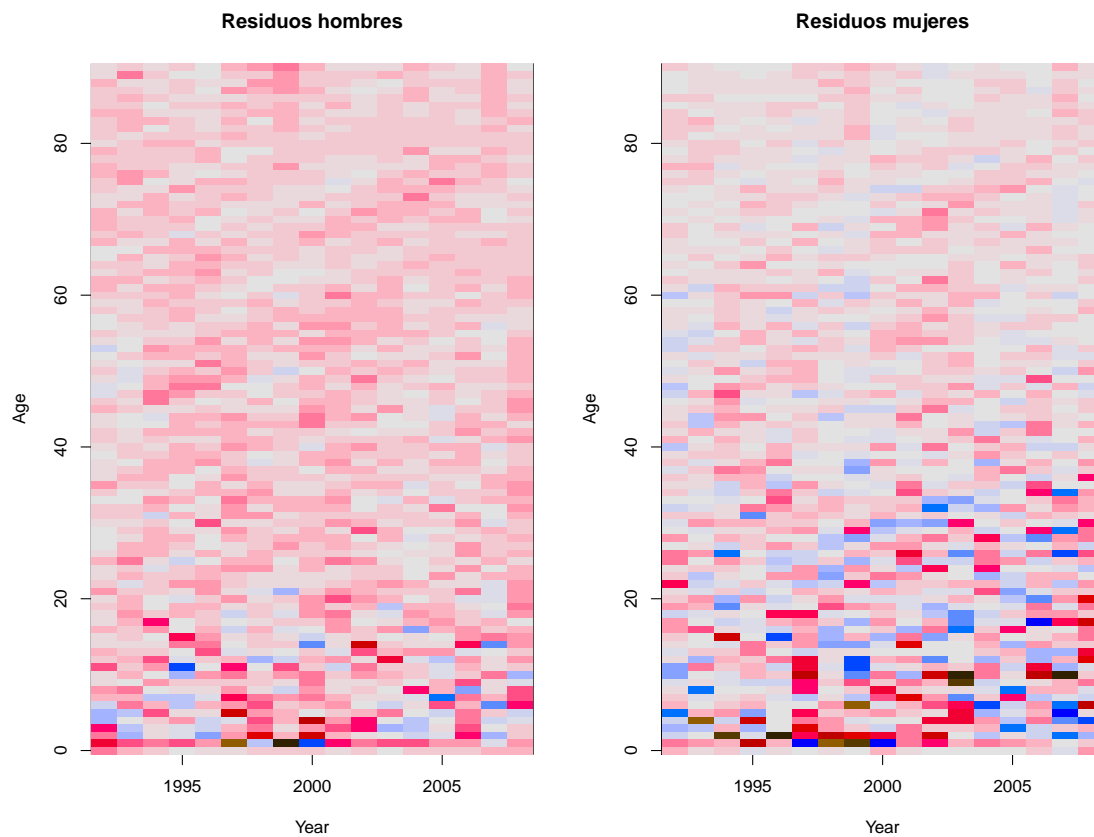


Figura 3.3: Gráficos de contornos de los residuos para la estimación del modelo de Lee-Carter Gaussiano por sexo

Brouhns et al. (2002) señala que el método de estimación propuesto por los autores tiene el inconveniente de suponer que los errores presentan homocedasticidad, lo cual es bastante poco realista. Debido a que el número de muertes es una variable aleatoria de conteo, suponer una distribución Poisson resulta más apropiado.

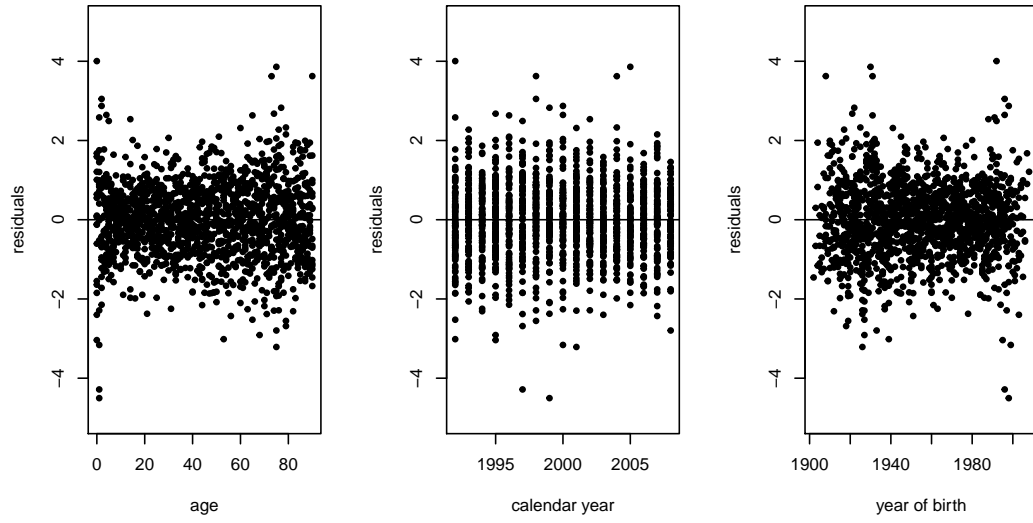
3.2.2 Estimación modelo de Lee-Carter con entorno GAPC

El paquete StMoMo de R es la herramienta que utilizaremos para trabajar los modelos de mortalidad GAPC. A continuación aplicaremos el paquete StMoMo para ajustar el modelo de Lee-Carter a los datos de mortalidad de Chile. En primer lugar, ajustaremos un modelo suponiendo que el número de muertes sigue una distribución Binomial, luego ajustaremos los datos suponiendo que el número de muertes sigue una distribución Poisson y compararemos estos resultados. Como antes, ajustamos para edades entre 0 y 90 años.

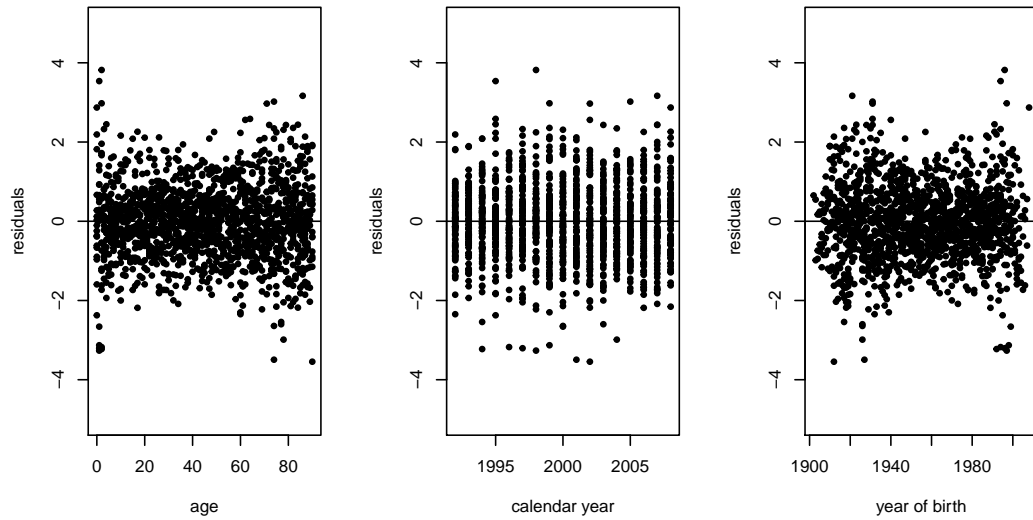
La bondad de ajuste de los modelos de mortalidad usualmente se analiza mediante la inspección de los residuos del modelo ajustado. Los patrones regulares en los residuos indican la incapacidad del modelo para describir todas las características de los datos de manera adecuada (Villegas et al., 2017). El paquete StMoMo permite obtener la desviance residual estandarizada.

La figura 3.4 presenta la desviance residual estandarizada según edad, año calendario y año de nacimiento del modelo de Lee-Carter con entorno Binomial por sexo y podemos apreciar que para ambos sexos los residuos se encuentran mayoritariamente en el intervalo $[-2, 2]$, además no se aprecian patrones de comportamiento en los gráficos. Estas características se interpretan como un ajuste adecuado del modelo.

A su vez, la figura 3.5 presenta la desviance residual estandarizada del modelo de Lee-Carter con entorno Poisson por sexo. Se observa que para ambos sexos los residuos se concentran en el intervalo $[-2, 2]$, además no se aprecian patrones de comportamiento, por lo que concluimos que el modelo presenta un adecuado ajuste de los datos.

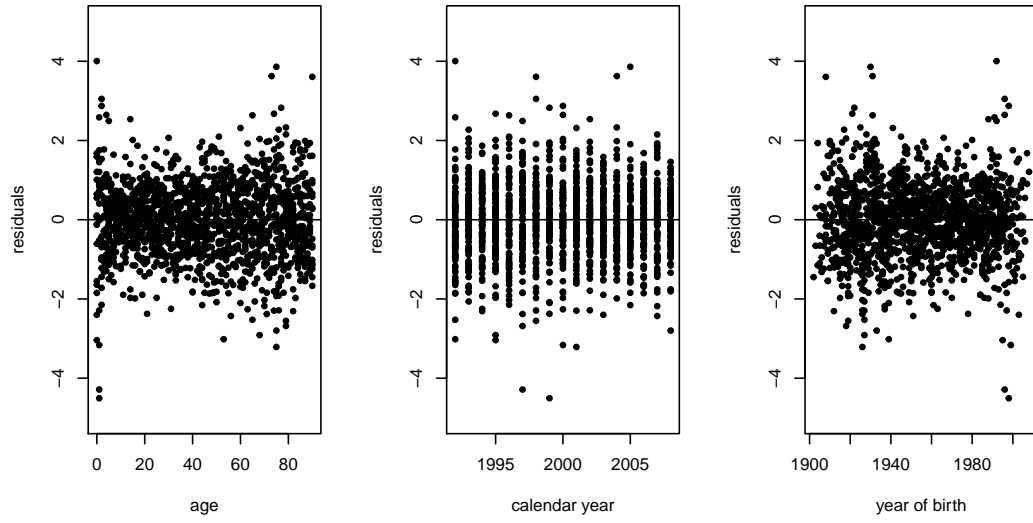


(a) hombres

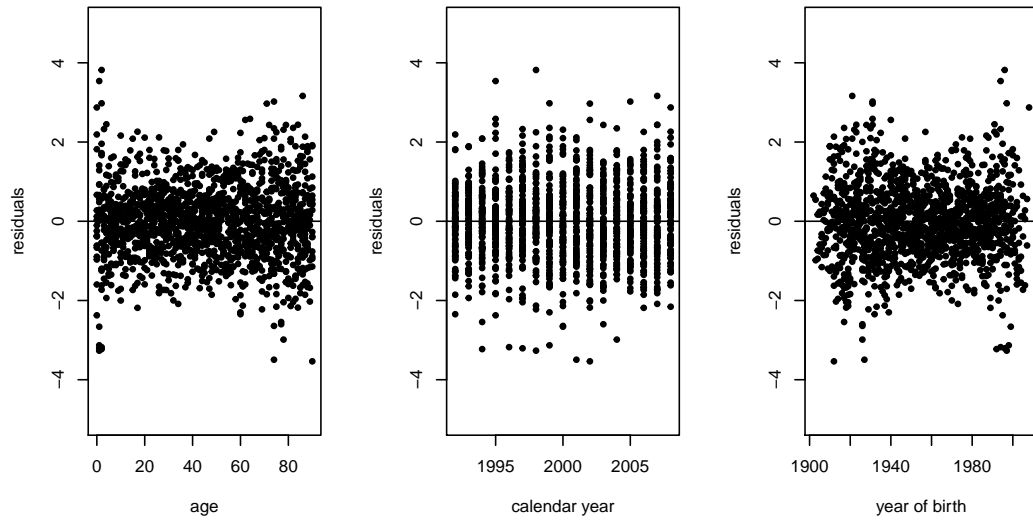


(b) mujeres

Figura 3.4: Desviance residual estandarizada según edad, año calendario y año de nacimiento del modelo Lee-Carter con entorno Binomial



(a) hombres



(b) mujeres

Figura 3.5: Desviance residual estandarizada según edad, año calendario y año de nacimiento del modelo Lee-Carter con entorno Poisson

Otras medidas de bondad de ajuste son el criterio de información de Akaike y el criterio de información Bayesiano. Cuando se evalúa la bondad de ajuste de diferentes modelos, es esperable que los modelos con más parámetros proporcionen un mejor ajuste a los datos. Los criterios de información de Akaike y Bayesiano asignan un valor a cada modelo en función de su verosimilitud y de la cantidad de parámetros que tiene, medida que genera un balance entre la bondad de ajuste del modelo y su simplicidad. Matemáticamente se definen como

$$AIC = 2\nu - 2\log(\mathcal{L})$$

$$BIC = \nu \log K - 2\log(\mathcal{L})$$

donde ν es el número de parámetros estimados del modelo, \mathcal{L} es el máximo valor de la función de verosimilitud del modelo y K es el número de observaciones. Se prefieren los modelos con un menor valor de AIC y BIC.

Tabla 3.1: Valores AIC y BIC del modelo Lee-Carter asumiendo que el número de muertes tiene distribución Binomial, y asumiendo que el número de muertes tiene distribución Poisson, ajustado para datos de mortalidad de hombres y mujeres de Chile.

Modelo	AIC	BIC
Lee-Carter Binomial Hombres	14538.34	15591.12
Lee-Carter Poisson Hombres	14588.89	15641.67
Lee-Carter Binomial Mujeres	13411.28	14464.07
Lee-Carter Poisson Mujeres	13450.09	14502.87

En base al análisis de los residuos, vemos que ambos modelos presentan un adecuado ajuste. Por su parte, los valores de bondad de ajuste AIC y BIC presentados en la tabla 3.1 son menores para el ajuste con distribución Binomial, en ambos sexos, por lo que podemos concluir que para los datos utilizados, el modelo Lee-Carter asumiendo que el número de muertes sigue una distribución Binomial ajusta mejor que el mismo modelo asumiendo una distribución Poisson para el número de muertes, tanto para hombres como para mujeres.

La figura 3.6 presenta los gráficos de los parámetros que hemos ajustado a los datos de mortalidad de los hombres y mujeres de Chile, comprendido entre los años 1992 y 2008, con el modelo Lee-

Carter asumiendo que el número de muertes sigue una distribución Binomial. Como era esperable, el parámetro α_x que captura la forma general de la mortalidad para cada edad es similar a lo estimado con el modelo de Lee Carter Gaussiano que ajustamos anteriormente. Se observa una mortalidad alta en los recién nacidos, que luego cae rápidamente hasta un mínimo en la edad de 10 años para los hombres y de 9 años para las mujeres y para luego volver a crecer. También se ve que la mortalidad de los hombre es mayor que la mortalidad de las mujeres.

Por su parte, el parámetro β_x es siempre positivo para ambos sexos, y tiene un comportamiento irregular en ambos casos. La tendencia de la mortalidad es capturada por k_t que para ambos sexos decrece, lo que indica que la mortalidad aumenta con la edad y disminuye con el tiempo calendario.

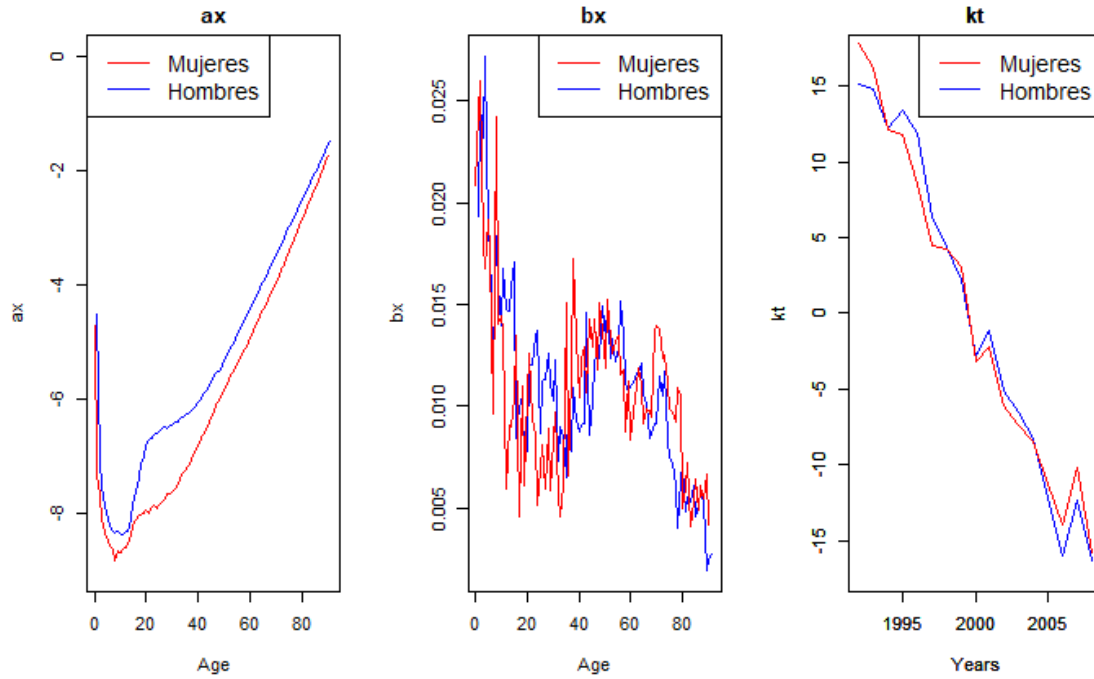


Figura 3.6: Estimación de los parámetros del modelo Lee-Carter con entorno Binomial

3.3 Estimación modelo de Renshaw-Haberman

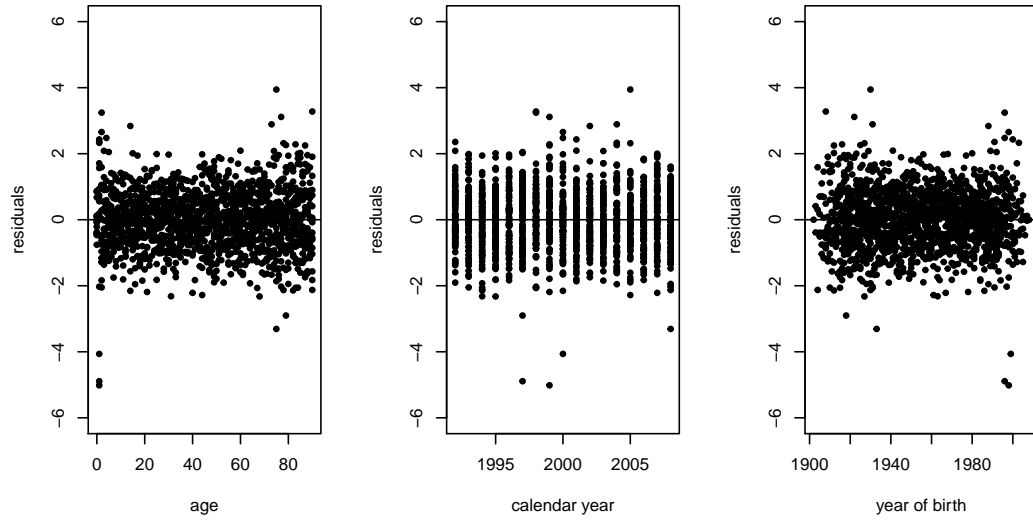
Como antes, aplicaremos el paquete StoMoMo de R para ajustar el modelo de Renshaw-Haberman a los datos de los hombres y mujeres de Chile para el periodo 1992-2008 y para edades entre 0 y 90 años. El ajuste del modelo Renshaw-Haberman requiere un tratamiento especial para solucionar problemas de convergencia. Currie (2016) propone el uso de valores iniciales al ajustar el modelo y por tanto utilizaremos los parámetros del modelo Lee-Carter como valores iniciales. Además, siguiendo el trabajo de Hunt and Villegas (2015), hemos incluido la siguiente restricción sobre el efecto de cohorte

$$\sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} (c - \bar{c}) \gamma_c = 0, \quad \bar{c} = \frac{1}{2}(t_1 - x_k + t_n - x_1)$$

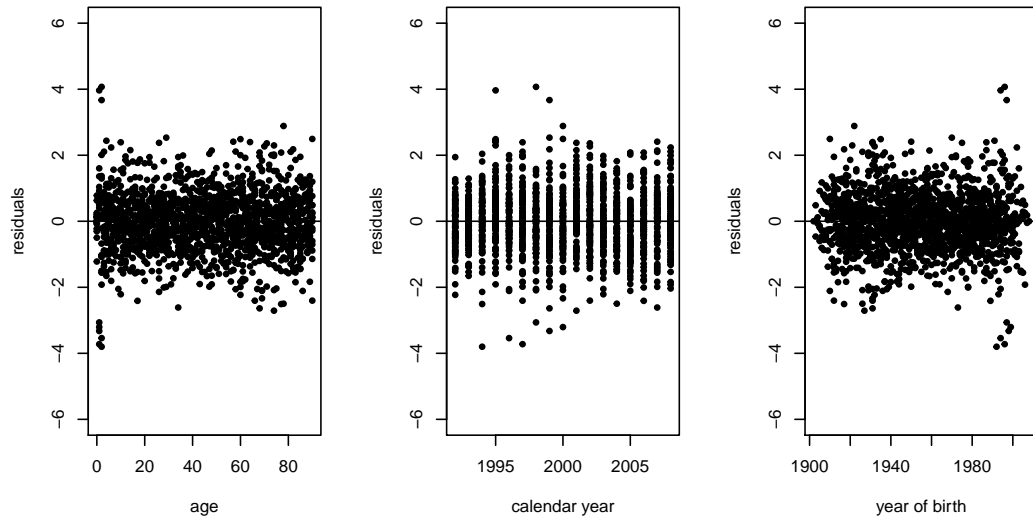
A continuación, estimaremos el modelo de Renshaw-Haberman suponiendo que el número de muertes sigue una distribución Binomial, luego ajustaremos los datos suponiendo que el número de muertes sigue una distribución Poisson y compararemos estos resultados.

La figura 3.7 presenta la deviance residual estandarizada según edad, año calendario y año de nacimiento del modelo de Renshaw-Haberman con entorno Binomial por sexo. Vemos que para ambos sexos los residuos se concentran en el intervalo $[-2, 2]$, además no se aprecian patrones de comportamiento. El modelo presenta un adecuado ajuste de los datos.

Por su parte, la figura 3.8 muestra la deviance residual estandarizada del modelo de Renshaw-Haberman con entorno Poisson por sexo. Se observa también en este caso que para ambos sexos los residuos se concentran en el intervalo $[-2, 2]$, y no se aprecian patrones de comportamiento por lo que concluimos que el modelo presenta un adecuado ajuste de los datos.

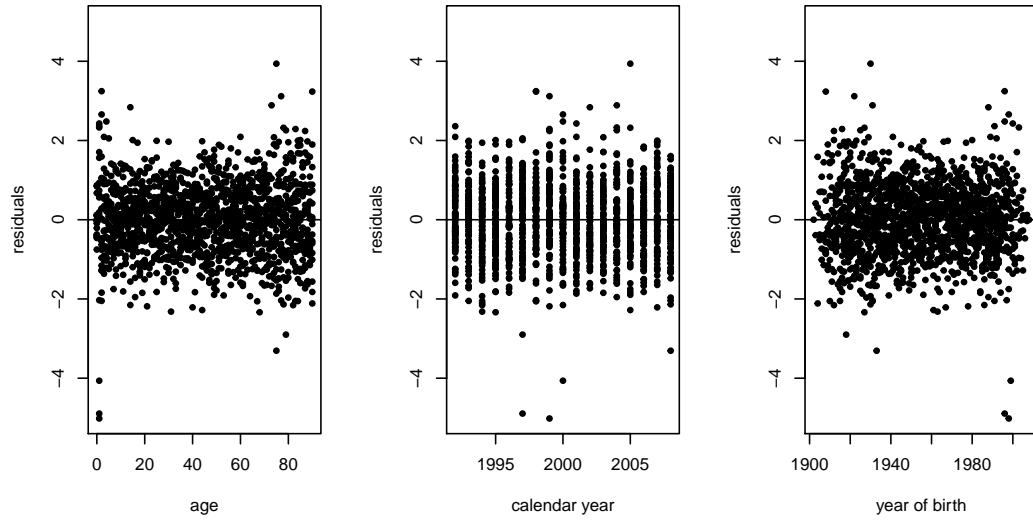


(a) hombres

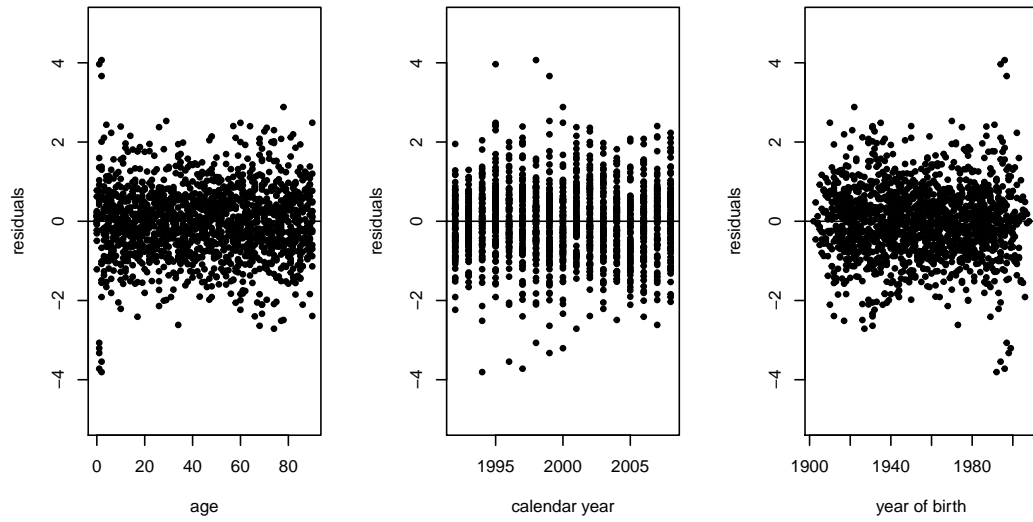


(b) mujeres

Figura 3.7: Desviance residual estandarizada según edad, año calendario y año de nacimiento del modelo Renshaw-Haberman con entorno Binomial.



(a) hombres



(b) mujeres

Figura 3.8: Desviance residual estandarizada según edad, año calendario y año de nacimiento del modelo Renshaw-Haberman con entorno Poisson

Tabla 3.2: valores AIC y BIC del modelo Renshaw-Haberman asumiendo que el número de muertes tiene distribución Binomial, y asumiendo que el número de muertes tiene distribución Poisson, ajustado para datos de mortalidad de hombres y mujeres de Chile.

Modelo	AIC	BIC
Renshaw-Haberman Binomial Hombres	14109.29	15723.2
Renshaw-Haberman Poisson Hombres	14161.85	15775.76
Renshaw-Haberman Binomial Mujeres	13150.43	14764.34
Renshaw-Haberman Poisson Mujeres	13190.6	14804.51

En base al análisis de los residuos, vemos que el modelo de Renshaw-Haberman asumiendo, ya sea que las muertes se distribuyen como una Binomial o como una Poisson, presentan un adecuado ajuste para ambos sexos. Considerando que los valores AIC y BIC presentados en la tabla 3.2 son menores cuando se asume distribución Binomial, esto tanto para hombres como para mujeres, podemos concluir que para los datos utilizados, el modelo Renshaw-Haberman asumiendo que el número de muertes sigue una distribución Binomial es un mejor ajuste.

La figura 3.9 presenta los gráficos de los parámetros que hemos estimados para los datos de mortalidad de hombres y mujeres de Chile, comprendido entre los años 1992 y 2008, con el modelo Renshaw-Haberman asumiendo que el número de muertes sigue una distribución Binomial.

Podemos apreciar que el parámetro α_x , que captura la forma general de la mortalidad para cada edad y el efecto de periodo $k_t^{(1)}$ que captura la tendencia de la mortalidad son similares a los obtenidos con el modelo de Lee-Carter, y se aprecia que la mortalidad aumenta con la edad y disminuye con los años calendarios.

Por su parte, el parámetro β_x tiene un comportamiento distinto a lo estimado en el modelo de Lee-Carter y el efecto de cohorte γ_{t-x} tiene un comportamiento oscilante alrededor del cero. Aunque estos parámetros se han podido estimar, en este caso su interpretación es difusa.

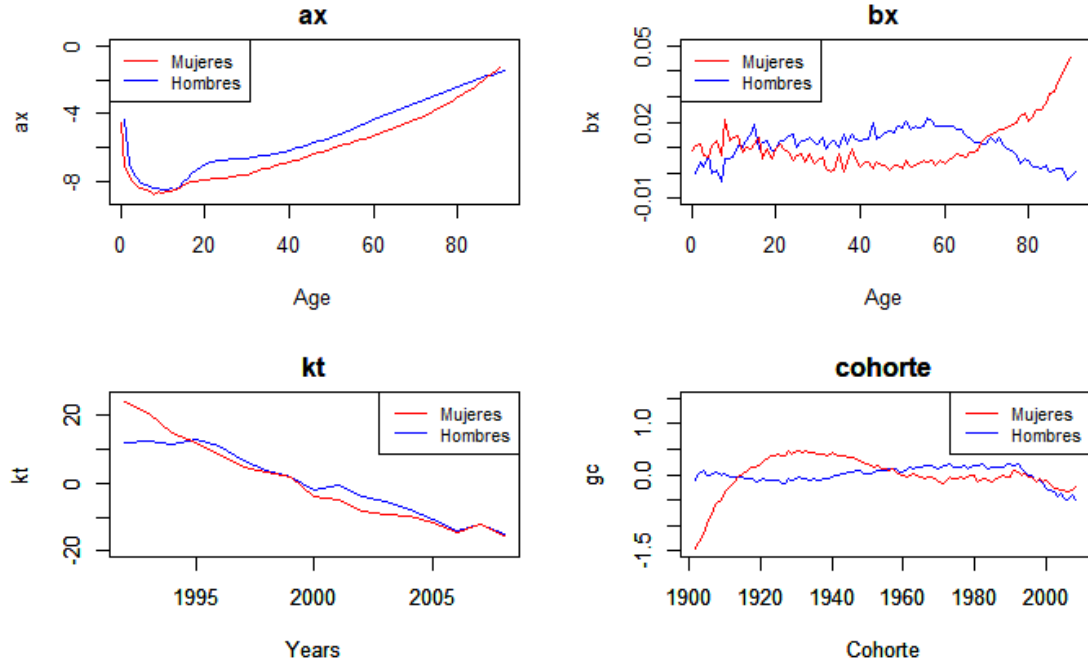
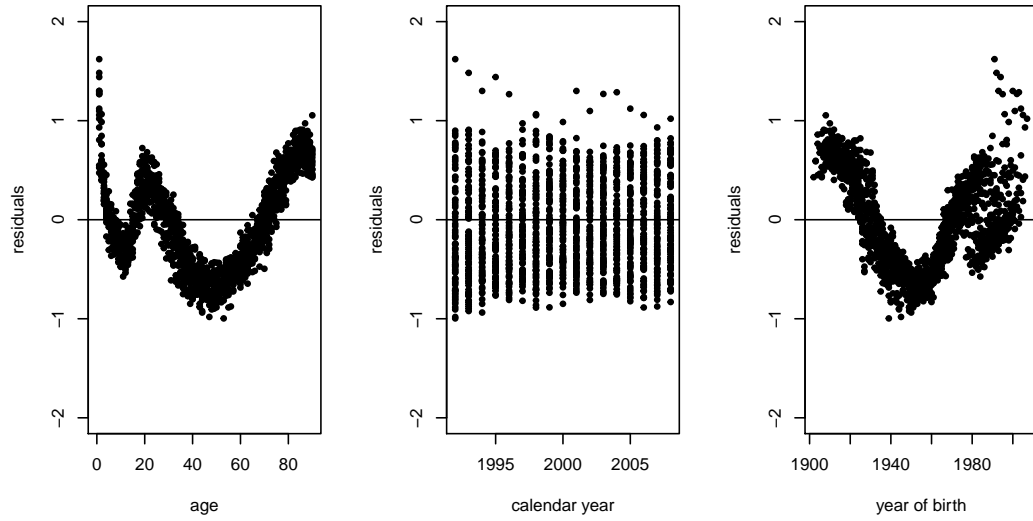


Figura 3.9: Estimación de los parámetros del modelo Renshaw-Haberman con entorno Binomial

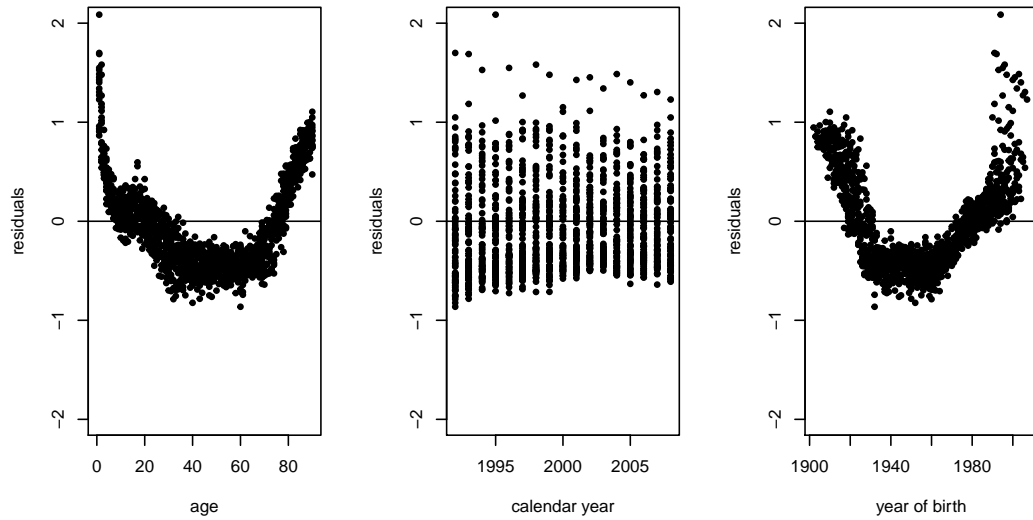
3.4 Estimación modelo de Cairns-Blake-Dowd

A continuación, ajustaremos el modelo de CBD suponiendo que el número de muertes sigue una distribución Binomial, y lo compararemos con el ajuste suponiendo una distribución Poisson. Para realizar el ajuste del modelo CBD utilizamos la función `cbd` del paquete `StMoMo` y como en los casos anteriores, realizamos la estimación de los parámetros para edades entre 0 y 90 años.

La figura 3.10 presenta la desviación residual estandarizada según edad, año calendario y año de nacimiento del modelo CBD con entorno Binomial por sexo. Vemos que para ambos sexos se aprecian claros patrones de comportamiento lo que nos indica que el modelo no es el adecuado.

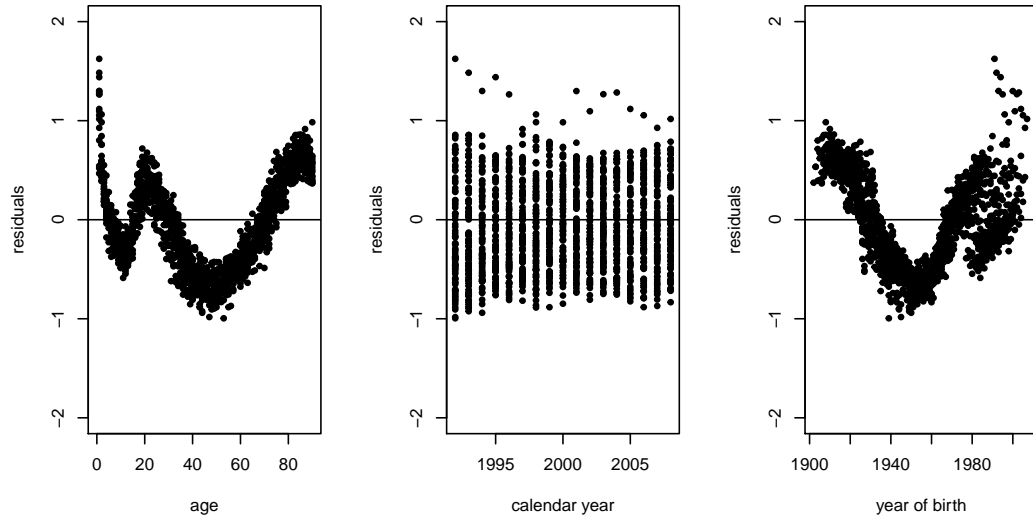


(a) hombres

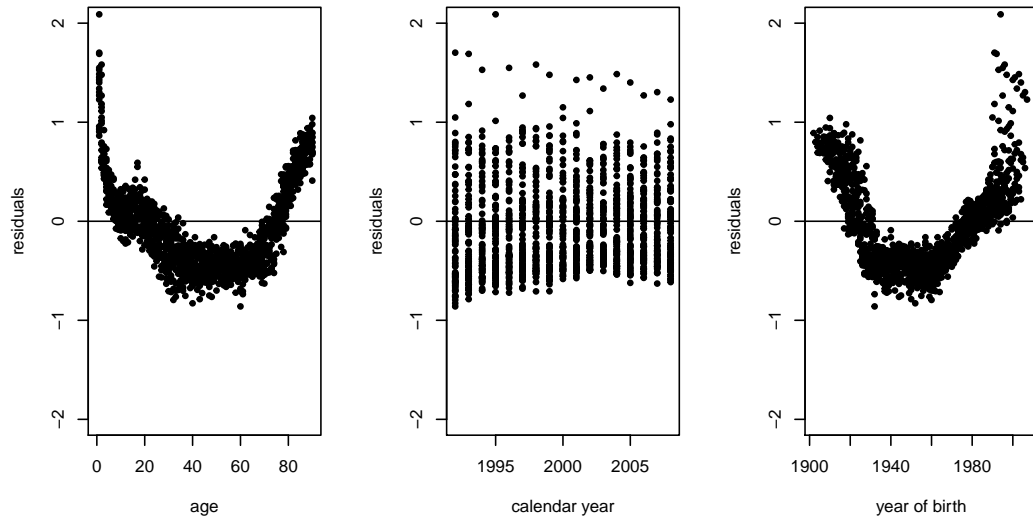


(b) mujeres

Figura 3.10: Desviance residual estandarizada según edad, año calendario y año de nacimiento del modelo CBD con entorno Binomial



(a) hombres



(b) mujeres

Figura 3.11: Desviance residual estandarizada según edad, año calendario y año de nacimiento del modelo CBD con entorno Poisson

Por su parte, la figura 3.11 muestra la desviación residual estandarizada del modelo CBD con entorno Poisson por sexo. Como en el caso anterior, vemos que para ambos sexos se aprecian claros patrones de comportamiento por lo que concluimos que el modelo no presenta un adecuado ajuste de los datos. En la Tabla 3.3 se muestran los valores de los criterios de información AIC y BIC, que como era esperable, también son bastante más elevados que para los modelos de Lee-Carter y de Renshaw-Haberman.

Tabla 3.3: valores AIC y BIC del modelo CBD asumiendo que el número de muertes tiene distribución Binomial, y asumiendo que el número de muertes tiene distribución Poisson, ajustado para datos de mortalidad de hombres y mujeres de Chile.

Modelo	AIC	BIC
Cairns-Blake-Dowd Binomial Hombres	207061.8	207243.5
Cairns-Blake-Dowd Poisson Hombres	203667.6	203849.3
Cairns-Blake-Dowd Binomial Mujeres	206962.8	207144.5
Cairns-Blake-Dowd Poisson Mujeres	204269.7	204451.4

En la figura 3.12 vemos los gráficos de los dos efectos de periodo que hemos estimado para los datos de mortalidad de los hombres y mujeres de Chile, comprendido entre los años 1992 y 2008, con el modelo CBD asumiendo que el número de muertes sigue una distribución Poisson.

Podemos apreciar que tanto para hombres como para mujeres $k_t^{(1)}$ tienen una forma similar a los efectos de periodo de los modelos Lee-Carter, en el sentido de que los parámetros son decreciente y esto indica que las tasas de mortalidad decrecen a medida que aumentan los años calendario. Por su parte los parámetros $k_t^{(2)}$ son crecientes para ambos sexos, lo que concuerda con que a menor edad las mejoras en la mortalidad son mayores que las mejoras en edades avanzadas.

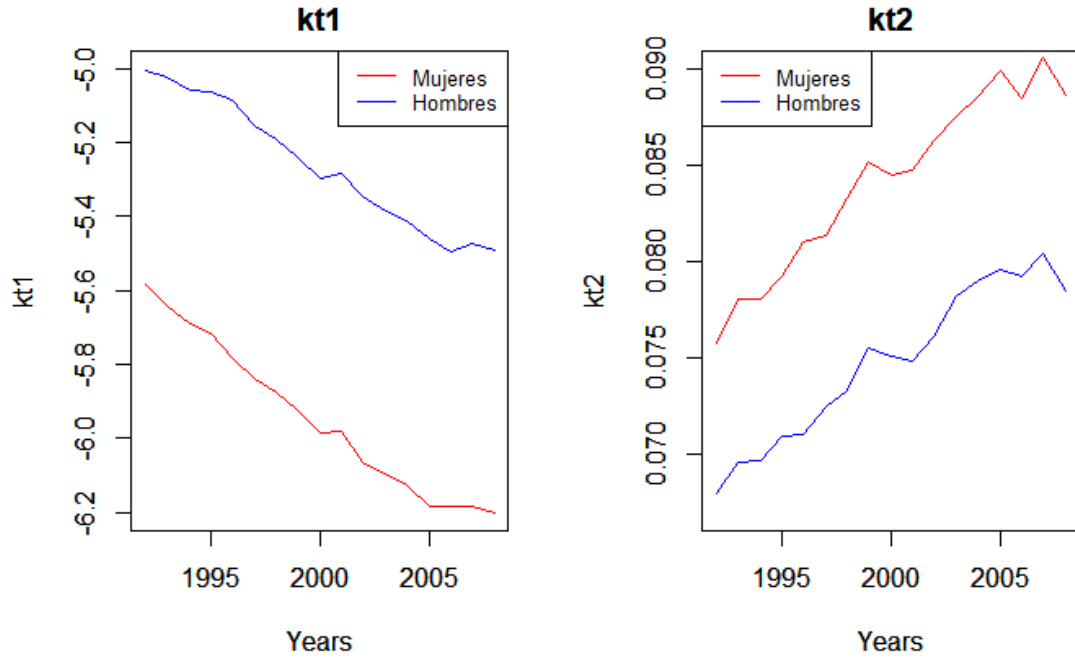


Figura 3.12: Estimación de los parámetros del modelo CBD con entorno Poisson.

3.5 Comparación entre modelos estimados

En base a las medidas de bondad de ajuste para los modelos con entorno GAPC, en las páginas anteriores observamos que para los datos tanto de hombres como de mujeres, los modelos de Lee-Carter y de Renshaw-Haberman presentan mejores resultados cuando se asume que el número de muertes sigue una distribución Binomial, que cuando se utiliza la distribución Poisson. Vimos también notorios patrones en los gráficos de la desviación residual estandarizada del modelo CBD y que los valores AIC y BIC son menores en este modelo cuando se asume que el número de muertes sigue una distribución Poisson, aunque dichos valores son bastante más elevados que en los ajustes con Lee-Carter y Renshaw-Haberman. En consecuencia, continuaremos nuestro estudio con los modelos de Lee-Carter y de Renshaw-Haberman con distribución Binomial y con el modelo CBD con distribución Poisson.

Ahora, resulta interesante saber qué modelo estima mejor el número de muertes, y para este propósito utilizaremos como medida de comparación entre los modelos estimados, el error cuadrático medio y el error porcentual absoluto medio, midiendo la diferencia entre el número de muertes observadas d_{xt} y estimadas \hat{d}_{xt} .

Dada su importancia y su amplio uso en diversos estudios, incluiremos también en esta comparación el desempeño logrado por el modelo de Lee-Carter estimado en su versión original.

El error cuadrático medio mide las diferencias en términos de distancia euclídea entre los valores observados y ajustados, y es definido como:

$$ECM(\hat{d}_{xt}) = \sqrt{\sum_x \frac{(d_{xt} - \hat{d}_{xt})^2}{n}}, \quad t = t_1, \dots, t_n$$

A su vez, el error porcentual absoluto medio (EPAM) mide la distancia relativa entre los valores observados y ajustados, se define como

$$EPAM(\hat{d}_{xt}) = \frac{\sum_x \frac{|d_{xt} - \hat{d}_{xt}|}{d_{xt}}}{n}, \quad t = t_1, \dots, t_n$$

En la tabla 3.4 presentamos los valores del error cuadrático medio y del error porcentual absoluto medio para los modelos Lee-Carter y Renshaw-Haberman asumiendo distribución Binomial para el número de muertes, del modelo CBD con entorno Poisson y del modelo Lee Carter original.

Tabla 3.4: Medidas de error para modelos estimados con datos de mortalidad de Chile

Modelo	ECM	EPAM
Lee-Carter Binomial Hombres	30.458	0.062
Renshaw-Haberman Binomial Hombres	24.4606	0.0568
Cairns-Blake-Dowd Poisson Hombres	190.5637	0.9465
Lee-Carter Gaussiano Hombres	33.4981	0.0651
Lee-Carter Binomial Mujeres	25.2083	0.08
Renshaw-Haberman Binomial Mujeres	20.0052	0.0744
Cairns-Blake-Dowd Poisson Mujeres	158.3856	2.1594
Lee-Carter Gaussiano Mujeres	39.0688	0.0847

Como era esperable, para ambos sexos el modelo CBD es el que peor resultados exhibe, por lo que no continuaremos analizando los datos de mortalidad de Chile con este modelo. A su vez, tanto para hombres como para mujeres el modelo de Renshaw-Haberman es el que presenta menor error entre el número de muertes estimadas y su valor real. También apreciamos que existe una leve diferencia entre los desempeños de los modelos de Lee Carter con entorno Binomial versus su versión original.

Capítulo 4

Pronósticos de tasas de mortalidad

A continuación presentamos los pronósticos para los modelos de Lee-Carter Gaussiano, Lee-Carter con distribución Binomial y del modelo de Renshaw-Haberman con distribución Binomial.

Cabe señalar que la metodología de los modelos de mortalidad que hemos utilizado, consiste en hacer una extrapolación de tendencias pasadas y supone que el futuro será parecido al pasado. Así no se incorporan supuestos sobre los avances en medicina o cambios ambientales o deterioros futuros, la información que considera es el historial anterior.

4.1 Pronósticos modelo de Lee-Carter

Recordemos que el modelo Lee-Carter considera solo un efecto de periodo k_t y no contempla efectos de cohorte, por lo que para pronosticar el tanto central de mortalidad se debe predecir el parámetro k_t . En el modelo original, los autores propusieron un modelo ARIMA(0,1,0) con constante para generar dichos pronosticos, pero en este trabajo utilizamos la función `auto.arima` del paquete `forecast` para seleccionar el mejor proceso ARIMA para los \hat{k}_t que hemos estimado.

La figura 4.1 presenta el pronóstico del efecto de periodo para hombres y mujeres para los siguientes 15 años del modelo Lee-Carter Gaussiano. La parte sombreada oscura representa el intervalo del pronóstico al 95% de confianza, la otra zona es el intervalo de confianza al 80%. En este caso,

tanto para hombres como para mujeres el mejor proceso es un ARIMA (1,1,0) con constante. En la figura 13 vemos que la tendencia de la mortalidad decrece para ambos sexos y como era esperable, los intervalos de confianza de los pronósticos aumentan a medida que avanzamos en los años calendarios. Vemos también que dichos intervalos son de mayor amplitud en el caso de las mujeres.

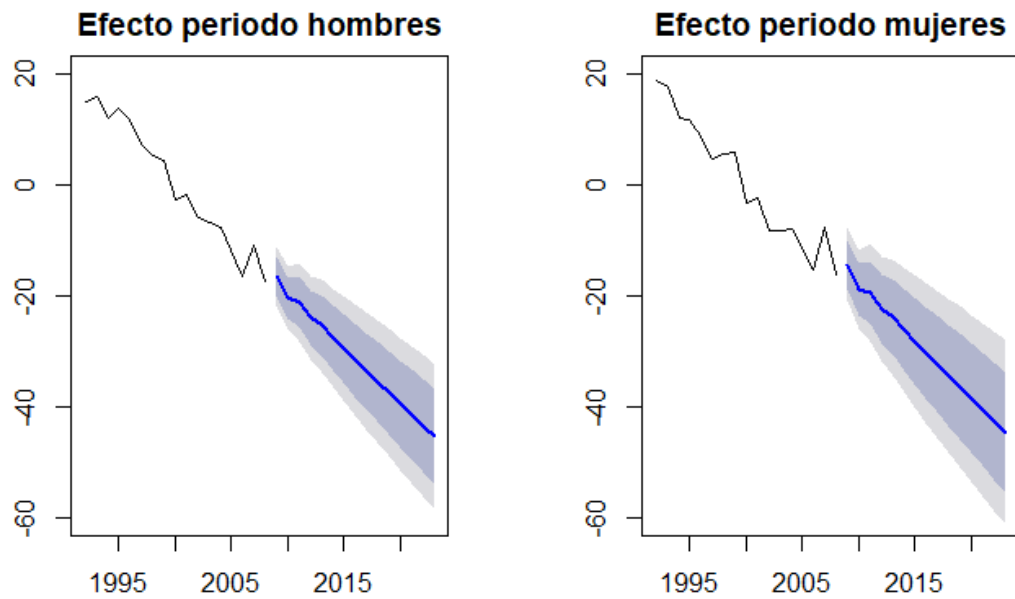


Figura 4.1: Pronóstico del efecto de periodo para hombres y mujeres con horizonte de 15 años para el modelo Lee-Carter Gaussiano.

Por su parte, la figura 4.2 presenta el pronóstico del efecto de periodo para hombres y mujeres para los siguientes 15 años del modelo Lee-Carter asumiendo distribución Binomial. La parte sombreada oscura representa el intervalo del pronóstico al 95% de confianza, la otra zona es el intervalo de confianza al 80%. En este caso el mejor proceso ARIMA para los hombres es un ARIMA (1,1,0) con constante y para las mujeres es un ARIMA(2,1,0) con constante. En la figura 4.2 vemos que la tendencia de la mortalidad decrece para ambos sexos, los intervalos de confianza de los pronósticos aumentan a medida que avanzamos en los años calendarios, aunque levemente en el caso de las

mujeres y de forma notoria en el caso de los hombres. Vemos también que dichos intervalos son de mayor amplitud en el caso de los hombres.

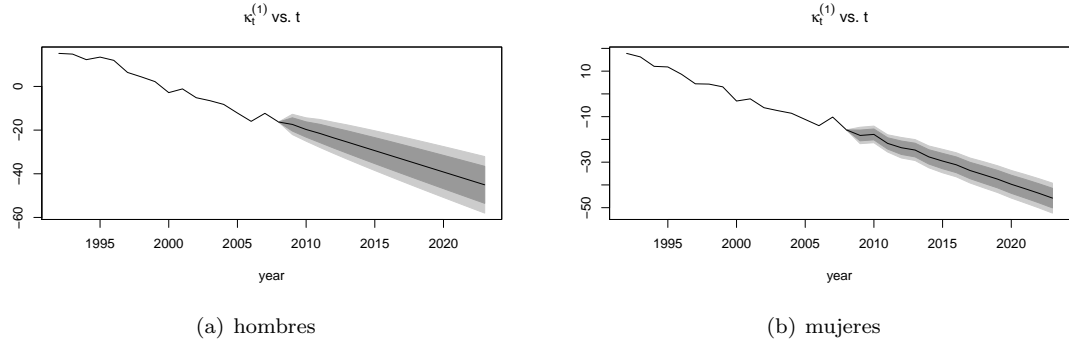


Figura 4.2: Pronóstico del efecto de periodo para hombres y mujeres con horizonte de 15 años para el modelo Lee-Carter Binomial.

4.2 Pronósticos modelo de Renshaw-Haberman

Generar pronósticos con el modelo Renshaw-Haberman implica modelar el comportamiento de los parámetros $k_t^{(1)}$ y γ_{t-x} . Asumiremos que ambos parámetros son independientes (Renshaw and Haberman, 2006) y como antes utilizaremos la función `auto.arima` del paquete `forecast` para seleccionar el mejor proceso ARIMA para los parámetros \hat{k}_t y $\hat{\gamma}_{t-x}$ que hemos estimado. En el capítulo anterior vimos que para nuestros datos, el modelo Renshaw-Haberman presenta un mejor ajuste cuando se asume que el número de muertes sigue una distribución Binomial, y por tanto utilizamos este modelo para generar pronósticos para los siguientes 15 años.

La figura 4.3 presenta los pronóstico del efecto de periodo para ambos sexos para los siguientes 15 años del modelo Renshaw-Haberman con distribución Binomial, y la figura 4.4 muestra lo propio para el efecto de cohorte. La parte sombreada oscura representa el intervalo del pronóstico al 95% de confianza, la otra zona es el intervalo de confianza al 80%. En este caso, tanto para hombres como para mujeres el mejor proceso para el efecto de periodo es un ARIMA (0,1,0) con constante, mientras que el efecto de cohorte se ha modelado con un proceso ARIMA(2,2,2) para los hombres

y un $ARIMA(0,2,2)$ para las mujeres. En la figura 4.3 vemos que la tendencia de la mortalidad decrece para ambos sexos, los intervalos de confianza de los pronósticos aumentan a medida que avanzamos en los años calendarios y vemos también que dichos intervalos son de mayor amplitud en el caso de los hombres. Por su parte, el efecto cohorte es decreciente para los hombres y creciente para las mujeres.

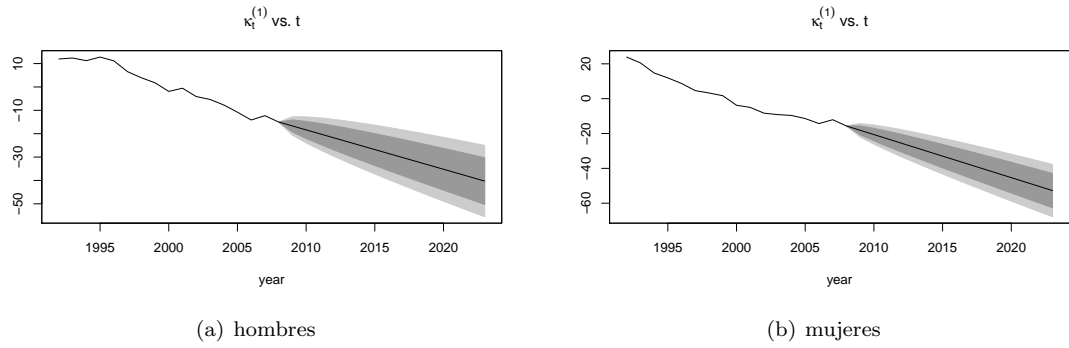


Figura 4.3: Pronóstico del efecto de periodo para hombres y mujeres con horizonte de 15 años para el modelo Renshaw-Haberman Binomial.

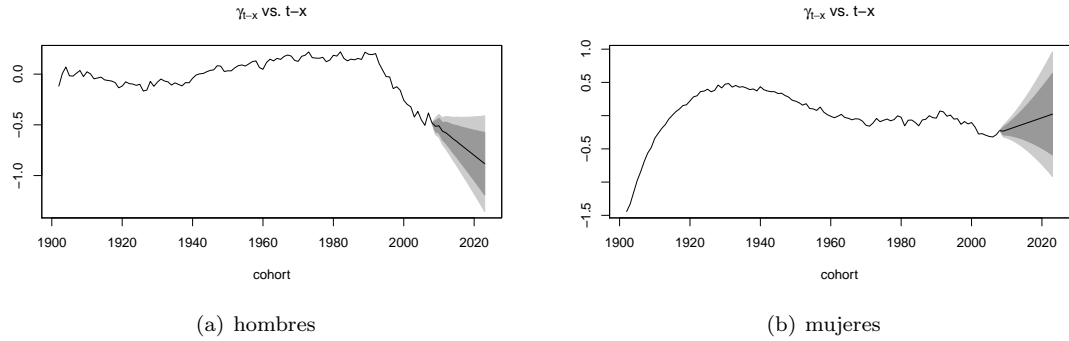


Figura 4.4: Pronóstico del efecto de cohorte para hombres y mujeres con horizonte de 15 años para el modelo Renshaw-Haberman Binomial.

4.3 Desempeño de los modelos según sus pronósticos

Recordemos que hemos estimado los modelos de Lee-Carter, Renshaw-Haberman y CBD para los datos de mortalidad de la población de Chile, datos que obtuvimos desde la base de datos The Human Mortality Database para el periodo comprendido entre los años 1992 a 2008, y luego hemos generado pronósticos de tasas de mortalidad a un horizonte de 15 años, es decir , para el periodo comprendido entre los años 2009 a 2023. En esta sección vamos a medir el desempeño de los modelos según los pronósticos generados.

En el contexto de la elaboración de tablas de mortalidad para efectos del cálculo de reservas técnicas de los seguros de rentas vitalicias, a solicitud de la Superintendencia de Valores y Seguros (actualmente esta institución se llama Comisión para el Mercado Financiero), el Instituto Nacional de Estadísticas de Chile, elaboró tablas de mortalidad en el formato que utilizamos en este trabajo, es decir, con edades y años calendarios no agrupados. De este modo, hemos obtenido tablas de mortalidad de la población general de Chile con edades entre 0 y 89 años para el periodo 2009 a 2012 ¹.

Con estos datos, en la tabla 4.1 presentamos los valores del error cuadrático medio y del error porcentual absoluto medio entre las tasas de mortalidad observadas por INE para los años 2009 a 2012 y las tasas de mortalidad pronosticadas por los modelos de Lee-Carter en su versión original y con entorno GAPC, y del modelo de Renshaw-Haberman en el mismo periodo de tiempo.

En base a ambas medidas vemos que el modelo de Lee Carter con distribución Binomial genera mejores pronósticos para los datos de mortalidad de las mujeres de Chile, y para el caso de los hombres, si se considera como medida el ECM es el modelo de Lee-Carter Gaussiano, y si se considera como medida el EPAM es el modelo Lee-Carter Binomial. Ahora bien, en cada caso, los otros modelos tienen desempeños levemente distintos, por lo que continuaremos trabajando con ellos.

Dada su utilidad para la planificación de los sistemas de seguridad social y para las compañías

¹en anexo están los datos que hemos utilizado, los cuales se pueden descargar desde el sitio web <http://www.svs.cl/portal/principal/605/w3-channel.html>

Tabla 4.1: Medidas de error para los pronósticos de modelos estimados para datos de mortalidad de Chile

Modelo	ECM	EPAM
Lee-Carter Binomial Hombres	0.0031	0.0775
Renshaw-Haberman Binomial Hombres	0.003	0.0926
Lee-Carter Gaussiano Hombres	0.0026	0.0812
Lee-Carter Binomial Mujeres	0.0023	0.0804
Renshaw-Haberman Binomial Mujeres	0.0042	0.0932
Lee-Carter Gaussiano Mujeres	0.0025	0.0847

privadas de seguros entre otras materias, es de gran interés contar con modelos que logren describir de forma correcta los datos observados, y también es relevante que los modelos generen pronósticos confiables. Para los datos utilizados en este trabajo, hemos constatado que el modelo de Renshaw-Haberman es el que logra un mejor ajuste de los datos observados, pero es menos útil para pronosticar.

Por consiguiente, independiente que continuemos trabajando con todos los modelos pronosticados, es necesario en este punto concluir que, considerando el desempeño tanto para describir el pasado como para generar pronósticos, y también por su simplicidad, para los datos utilizados en este trabajo el modelo de Lee-Carter Binomial es el más adecuado para estudiar el comportamiento y la evolución de la mortalidad de la población en Chile.

Capítulo 5

Aplicación en Seguros de Vida

En el capítulo anterior estimamos pronósticos de tasas de mortalidad utilizando los modelos de Lee-Carter con distribución Binomial, el modelo de Renshaw-Haberman con distribución Binomial y el modelo de Lee-Carter Gaussiano. Con estos datos, en este capítulo construiremos tablas de mortalidad y las utilizaremos para calcular la prima pura en seguros de vida, y compararemos sus resultados.

5.1 Tablas de mortalidad

Para realizar dicha comparación, definimos dos escenarios hipotéticos para los cuales calcularemos las primas. Estos escenarios hacen referencia a personas que desean contratar un seguro de vida por una cierta cantidad de años, para que en caso de su fallecimiento, garantizar un capital a sus beneficiarios. Así, definimos

Escenario 1: un hombre de 65 años en el año 2009, que desea contratar un seguro pagadero al final del año de fallecimiento de cuantía 60.000 euros, si su muerte ocurre en los próximos 15 años. El tipo de interés considerado es del 2% efectivo anual.

Escenario 2: una mujer de 65 años en el año 2009, que desea contratar un seguro pagadero al final del año de fallecimiento de cuantía 60.000 euros, si su muerte ocurre en los próximos 15 años. El

tipo de interés considerado es del 2% efectivo anual.

Para el cálculo de la prima en el ámbito de los seguros de vida, en Chile se utilizan las llamadas tablas M95, tabla de mortalidad vigente desde el año 2000 y elaborada por la Superintendencia de Valores y Seguros (actualmente esta institución se llama Comisión para el Mercado Financiero), de uso obligatorio para el cálculo de las reservas matemáticas de los seguros de vida. La tabla de mortalidad M95 H, es la utilizada en la constitución de reservas de pólizas de seguros de vida en que el asegurado sea de sexo masculino y la tabla M95 M, es la utilizada en la constitución de reservas de pólizas de seguros de vida en que el asegurado sea de sexo femenino.¹

En la tabla 5.1 presentamos los valores q_{xt} para un hombre que en el año 2009 tiene 65 años. En las columnas 2, 3 y 4 están las tablas de mortalidad ajustada por el modelo de Lee-Carter con distribución Binomial, considerando la estimación puntual en la columna 2, utilizando los valores inferiores del intervalo de confianza del 95% del pronóstico del efecto de periodo k_t en la columna 3 (que denominamos como Lee-Carter Binomial Low y lo abreviamos como LCBL) y utilizando los valores superiores del intervalo de confianza del 95% del pronóstico del efecto de periodo k_t en la columna 4 (que denominamos como Lee-Carter Binomial Up y lo abreviamos como LCBU). Así mismo, en las columnas 5, 6 y 7 están las tablas de mortalidad ajustada por el modelo de Renshaw-Haberman con distribución Binomial (RHB, RHBL y RHBU), y en las columnas 8, 9, 10 están las tablas de mortalidad ajustada por el modelo de Lee-Carter Gaussiano (LCG, LCGL y LCGU). Finalmente en la columna 11 está la tabla de mortalidad M95 H.

La figura 5.1 presenta de forma gráfica los valores de la tabla 5.1. Se puede apreciar que las menores tasas de mortalidad las presenta el modelo de Lee-Carter Gaussiano y las tasas más altas el modelo de Renshaw-Haberman. Además los pronósticos del modelo de Renshaw-Haberman son los que más se aproximan a los valores de la tabla M95-H. También se observa que las mayores diferencias entre los distintos modelos son en las edades más avanzadas.

¹en anexo están los datos que hemos utilizado, los cuales se pueden descargar desde el sitio web http://www.cmfchile.cl/institucional/mercados/ver_archivo.php?archivo=/web/compendio/cir/cir_1476_2000.pdf

Tabla 5.1: Escenario 1

Edad	LCB	LCBL	LCBU	RHB	RHBL	RHBU	LCG	LCGL	LCGU	M95H
65	0,017	0,017	0,018	0,018	0,017	0,019	0,018	0,017	0,018	0,020
66	0,019	0,019	0,020	0,020	0,019	0,022	0,019	0,018	0,020	0,021
67	0,021	0,020	0,023	0,022	0,021	0,025	0,021	0,020	0,022	0,024
68	0,022	0,021	0,024	0,024	0,022	0,027	0,022	0,021	0,024	0,026
69	0,024	0,023	0,026	0,026	0,024	0,029	0,024	0,022	0,026	0,028
70	0,024	0,022	0,027	0,026	0,024	0,031	0,024	0,022	0,027	0,031
71	0,027	0,025	0,030	0,030	0,027	0,034	0,027	0,025	0,030	0,034
72	0,028	0,025	0,032	0,030	0,027	0,036	0,028	0,025	0,032	0,038
73	0,033	0,031	0,037	0,036	0,033	0,042	0,034	0,031	0,036	0,042
74	0,037	0,036	0,042	0,041	0,038	0,048	0,038	0,036	0,041	0,046
75	0,041	0,039	0,046	0,044	0,041	0,052	0,042	0,038	0,045	0,050
76	0,046	0,045	0,052	0,052	0,050	0,060	0,047	0,044	0,051	0,055
77	0,052	0,053	0,058	0,060	0,060	0,067	0,054	0,051	0,056	0,060
78	0,052	0,051	0,060	0,063	0,062	0,072	0,054	0,050	0,058	0,066
79	0,055	0,053	0,064	0,068	0,068	0,079	0,058	0,053	0,063	0,072

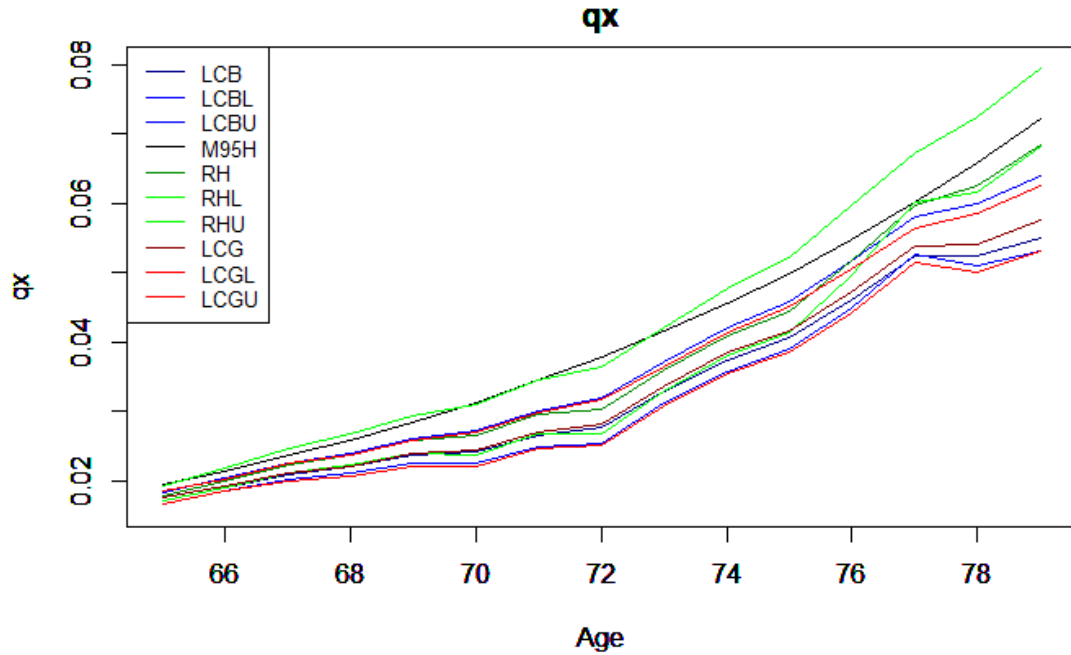


Figura 5.1: Comparación de tasas de mortalidad para un hombre de Chile que en 2009 tiene 65 años según modelos estimados y la tabla M95H

En la tabla 5.2 presentamos la misma información que en la tabla anterior, salvo que esta vez los datos son para una mujer que en el año 2009 tiene 65 años. Así también, la figura 5.2 presenta de forma gráfica los valores de la tabla 5.2. A diferencia del escenario 1, acá se puede apreciar que las menores tasas de mortalidad las presenta el modelo de Renshaw-Haberman y las tasas más altas el modelo de Lee-Carter Gaussiano, aunque todos los modelos tienen tasas menores a los valores de la tabla M95-M. También se observa que las mayores diferencias entre los distintos modelos son en las edades más avanzadas, y para el caso de las mujeres esta diferencia es mayor que en el caso de los hombres.

Tabla 5.2: Escenario 2

Edad	LCB	LCBL	LCBU	RHB	RHBL	RHBU	LCG	LCGL	LCGU	M95M
65	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,011	0,011
66	0,011	0,010	0,011	0,010	0,010	0,011	0,011	0,010	0,012	0,012
67	0,011	0,011	0,012	0,011	0,010	0,012	0,012	0,011	0,013	0,013
68	0,012	0,012	0,013	0,012	0,011	0,013	0,013	0,012	0,014	0,015
69	0,012	0,012	0,013	0,011	0,010	0,013	0,012	0,011	0,014	0,016
70	0,013	0,012	0,014	0,012	0,010	0,013	0,013	0,011	0,015	0,018
71	0,014	0,013	0,015	0,012	0,010	0,014	0,014	0,012	0,017	0,020
72	0,016	0,015	0,017	0,013	0,011	0,016	0,016	0,014	0,019	0,022
73	0,017	0,016	0,018	0,013	0,011	0,016	0,017	0,015	0,020	0,024
74	0,019	0,018	0,021	0,014	0,012	0,018	0,020	0,017	0,023	0,027
75	0,022	0,022	0,024	0,016	0,012	0,020	0,023	0,020	0,027	0,030
76	0,024	0,024	0,027	0,016	0,013	0,021	0,025	0,022	0,029	0,033
77	0,027	0,026	0,030	0,016	0,013	0,022	0,028	0,024	0,032	0,036
78	0,028	0,027	0,031	0,016	0,012	0,023	0,029	0,024	0,034	0,040
79	0,030	0,029	0,034	0,017	0,012	0,024	0,032	0,027	0,038	0,045

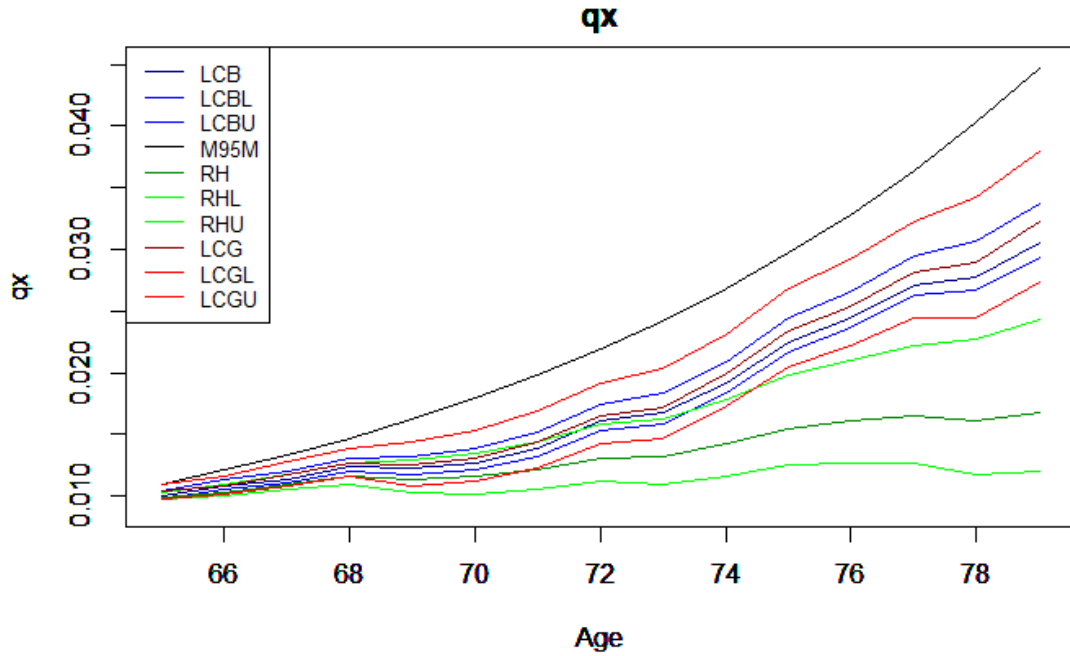


Figura 5.2: Comparación de tasas de mortalidad para una mujer de Chile que en 2009 tiene 65 años según modelos estimados y la tabla M95M

5.2 Cálculo de primas puras

Para calcular las primas puras de los dos escenarios propuestos utilizaremos las tablas de mortalidad presentadas en la sección anterior y compararemos los valores obtenidos de cada modelo con las primas obtenidas utilizando las tablas M95. Llamamos prima pura al valor esperado del coste real del riesgo que el asegurador asume.

El cálculo del valor actual actuarial en un seguro de vida pagadero al final del año de fallecimiento (VAA_s) se hace mediante la formula

$$VAA_s = \sum_{j=0}^{d-1} C \cdot (1 + I)^{-(1+j)} \cdot {}_j p_x \cdot q_{x+j}$$

donde C es la cuantía a pagar en caso de fallecimiento, d la temporalidad expresada en años, I es

el tipo de interés efectivo anual, ${}_j p_x$ la probabilidad de supervivencia de un individuo de edad x que llegue vivo a la edad de $x + j$ y q_{x+j} la probabilidad de fallecimiento a un horizonte temporal de un año, para un individuo de edad $x + j$ (Macias and Santolino, 2018).

Recordemos que en los dos escenarios antes definidos la cuantía es de 60.000 euros, la temporalidad es de 15 años y el tipo de interés considerado es del 2% efectivo anual. En la tabla 5.3 se presentan el valor actual actuarial de los seguros de vida para ambos escenarios utilizando las diferentes tablas de mortalidad con las que hemos trabajado.

Tabla 5.3: Valor actual actuarial

Modelos	Escenario 1	Escenario 2
Lee Carter Binomial	20052.818	11888.286
Lee-Carter Binomial-Low	19445.577	11478.196
Lee-Carter Binomial-Up	21925.925	12752.542
Renshaw-Haberman	21887.49	9257.806
Renshaw-Haberman-Low	21027.851	7958.709
Renshaw-Haberman-Up	24330.254	11106.415
Lee-Carter Gaussiano	20412.684	12252.605
Lee-Carter Gaussiano-Low	19224.975	10859.554
Lee-Carter Gaussiano-Up	21645.479	13806.268
M95	23476.022	15354.126

Podemos ver que para el escenario 1 el valor actual actuarial del modelo de Renshaw-Haberman Up es el más alto, y el obtenido por el modelo de Lee-Carter Gaussiano Low es el valor actual actuarial más bajo. Además destaca que solo el modelo de Renshaw-Haberman Up está por sobre el valor actual actuarial cuando se calcula utilizando la tabla M95-H. Por su parte, podemos ver que para el escenario 2 el valor actual actuarial utilizando todas las tablas de mortalidad es inferior a los valores obtenidos en el escenario 1 y además son menores que el valor actuarial resultante cuando se calcula utilizando la tabla M95-M. Para este escenario, el valor actual actuarial del modelo Lee-Carter Gaussiano UP es el más próximo a los valores alcanzados por la tabla M95-M y el modelo de Renshaw-Haberman Low es el valor actual actuarial más bajo.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo hemos presentado la familia de modelos de mortalidad estocástica edad-periodo-cohorte generalizados (GAPC por sus siglas en inglés) de Villegas et al. (2017), que abarca la gran mayoría de los modelos de proyección de mortalidad. Hemos presentado los modelos de Lee-Carter, Renshaw-Haberman y Cairns-Blake-Dowd expuestos bajo el marco de la familia de modelos GAPC, así como también hemos presentado el modelo de Lee-Carter en su versión original. Hemos utilizado estos modelos para ajustar datos de mortalidad para los hombres y mujeres de Chile entre las edades 0 a 90 años entre los años calendarios 1992 y 2008, datos que se obtienen desde la base de datos The Human Mortality Database.

Se han comparado los ajustes realizados con los modelos GAPC utilizando como criterio las medidas de bondad de ajuste AIC y BIC, asumiendo distribución Binomial y distribución Poisson para el número de muertes resultando que para ambos sexos, para el caso de Lee-Carter y Renshaw-Haberman se obtienen mejores resultados utilizando distribución Binomial, mientras que para el modelo de Cairns-Blake-Dowd se obtiene un mejor ajuste cuando se asume distribución Poisson. Sin embargo, en base al análisis de los residuos constatamos que el modelo de Cairns-Blake-Dowd no presenta un adecuado ajuste de los datos.

También se han comparado los ajustes utilizando como criterio los valores del error cuadrático medio y del error porcentual absoluto medio, entre el número de muertes observadas y estimadas, para

los modelos Lee-Carter y Renshaw-Haberman asumiendo distribución Binomial para el número de muertes, del modelo CBD con entorno Poisson y del modelo Lee Carter original. De este modo se ha constatado que, tanto para hombres como para mujeres el modelo de Renshaw-Haberman es el que presenta menor error. También apreciamos que existe una leve diferencia entre los desempeños de los modelos de Lee-Carter con entorno Binomial versus Lee-Carter Gaussiano, mientras que el modelo Cairns-Blake-Dowd es el que presenta los peores resultados.

Se generaron pronósticos a 15 años para las tasas de mortalidad, y con estos datos se ha calculado el error cuadrático medio y el error porcentual absoluto medio entre las tasas de mortalidad observadas por el Instituto Nacional de Estadísticas de Chile para los años 2009 a 2012 y las tasas de mortalidad pronosticadas por los modelos de Lee-Carter Gaussiano y con entorno Binomial, y del modelo de Renshaw-Haberman.

Para los datos utilizados en este trabajo, hemos constatado que el modelo de Renshaw-Haberman es el que logra un mejor ajuste de los datos observados, pero es menos útil para pronosticar. Por lo tanto, considerando el desempeño tanto para describir el pasado como para generar pronósticos, y también por su simplicidad, concluimos que para los datos utilizados en este trabajo el modelo de Lee-Carter Binomial es el más adecuado para describir el comportamiento y la evolución de la mortalidad de la población de Chile.

Con los pronósticos realizados, se han construido tablas de mortalidad, las que se han utilizado para calcular las primas estimadas en seguros de vida, en base a dos escenarios hipotéticos. Estas primas se compararon a su vez con las obtenidas utilizando la tabla de mortalidad M95, que es la tabla de mortalidad publicada por el ente regulador de Chile para que sea utilizada en la constitución de reservas de pólizas de seguros de vida. En vista de los resultados, las tablas M95 se presentan conservadoras en comparación a los otros modelos y parecen adecuadas para garantizar la solvencia de las entidades aseguradoras, en cuanto a posibles desviaciones en el riesgo de fallecimiento.

Durante el desarrollo de este trabajo una de las principales limitaciones ha sido el no contar con una mayor cantidad de datos de mortalidad de la población de Chile. Los registros de acceso público

que elabora el INE de Chile dispone las edades agrupadas en formato 0, 1 – 4, 5 – 9, ..., 75 – 79, 80+ y años calendarios en quinquenios, lo que redundaría en una menor cantidad de observaciones para efectos de la estimación de los parámetros de cada modelo. En este sentido, contando con una mayor cantidad de datos, una mejora importante sería desarrollar una comparación con más modelos de mortalidad que los que se han considerado en el presente trabajo.

Referencias

- Ayuso, M., H. Corrales, M. Guillén, A. M. Pérez-Marín, and J. Rojo (2007). *Estadística Actuarial Vida* (7 ed.). Barcelona: Ediciones UB.
- Blake, D., A. Cairns, and K. Dowd (2006). A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: Theory and calibration. *Journal of Risk & Insurance* 73, 687–718.
- Brouhns, N., M. Denuit, and J. K. Vermunt (2002). A poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics* 31(3), 373–393.
- Currie, I. D. (2016). On fitting generalized linear and non-linear models of mortality. *Scandinavian Actuarial Journal* (4), 356–383.
- Debón, A., F. Martínez, F. Montes, and M. Moshuk (2015). Proyección de los indicadores de mortalidad para España. *Estadística Española* 57(188), 291–321.
- Haberman, S. and A. Renshaw (2011). A comparative study of parametric mortality projection models. *Insurance: Mathematics and Economics* 48(1), 35–55.
- Hunt, A. and A. M. Villegas (2015). Robustness and convergence in the lee–carter model with cohort effects. *Insurance: Mathematics and Economics* 64, 186–202.
- Lee, R. and R. Rofman (1994). Modeling and projecting mortality in chile. *Notas de población* 22(59), 183–213.
- Lee, R. D. and L. R. Carter (1992). Modeling and forecasting u.s. mortality. *Journal of the American Statistical Association* 87(419), 659–671.

- Macias, Y. and M. Santolino (2018). Aplicación de los modelos Lee-Carter y Renshaw-Haberman en los seguros de vida y mixtos. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles* 4(24), 53–78.
- Renshaw, A. and S. Haberman (2006). A cohort-based extension to the lee-carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics* 38(3), 556–570.
- Villegas, A. M., P. Millossovich, and V. K. Kaishev (2017). Stmomo: Stochastic mortality modeling in r. *Journal of Statistical Software* 84(3), 1–38.

Anexo A

Tablas de mortalidad utilizadas para comparar pronósticos en sección 4.3

A continuación presentamos las tablas de mortalidad que se han utilizado para comparar los pronósticos de las tasas de mortalidad generados por los modelos de Lee-Carter Gaussiano, Lee-Carter Binomial y Renshaw-Haberman Binomial en la sección 4.3. Como se ha mencionado, estas tablas elaboradas por el INE de Chile, contienen: el número observado de fallecimientos que acá denotamos como d , la tasa central de mortalidad denotada como m y la probabilidad de fallecimiento a un año que denotamos como q , para las edades entre 0 y 89 años para el periodo 2009-2012, diferenciadas por sexo.

Tabla A.1: Datos de hombres en 2009

age	d	q	m	age	d	q	m
0	890.5510	0.0089	0.0090	45	293.6414	0.0031	0.0031
1	48.2908	0.0005	0.0005	46	317.1538	0.0034	0.0034
2	40.8450	0.0004	0.0004	47	340.8546	0.0036	0.0036
3	35.5761	0.0004	0.0004	48	364.1749	0.0039	0.0039
4	26.2904	0.0003	0.0003	49	388.1232	0.0042	0.0042
5	19.0709	0.0002	0.0002	50	414.7441	0.0045	0.0045
6	17.8320	0.0002	0.0002	51	445.1486	0.0048	0.0048
7	16.8617	0.0002	0.0002	52	478.8940	0.0052	0.0052
8	15.7428	0.0002	0.0002	53	516.4162	0.0056	0.0057
9	14.5712	0.0001	0.0001	54	558.2059	0.0061	0.0062
10	13.9896	0.0001	0.0001	55	603.8712	0.0067	0.0067
11	15.1196	0.0001	0.0001	56	654.6536	0.0073	0.0073
12	19.2887	0.0002	0.0002	57	712.6808	0.0080	0.0080
13	27.2432	0.0003	0.0003	58	778.9918	0.0088	0.0089
14	38.0187	0.0004	0.0004	59	852.8936	0.0097	0.0098
15	49.8436	0.0005	0.0005	60	930.5762	0.0107	0.0108
16	61.3934	0.0006	0.0006	61	1012.8260	0.0118	0.0119
17	72.6885	0.0007	0.0007	62	1104.1950	0.0130	0.0131
18	83.1684	0.0008	0.0008	63	1205.8789	0.0144	0.0145
19	92.8025	0.0009	0.0009	64	1315.2624	0.0159	0.0161
20	102.5507	0.0010	0.0010	65	1434.9419	0.0177	0.0178
21	111.9136	0.0011	0.0011	66	1555.8964	0.0195	0.0197
22	119.2091	0.0012	0.0012	67	1664.9084	0.0213	0.0215
23	123.8167	0.0013	0.0013	68	1756.0979	0.0230	0.0232
24	126.3254	0.0013	0.0013	69	1838.0726	0.0246	0.0249
25	128.3880	0.0013	0.0013	70	1909.1708	0.0262	0.0265
26	130.4606	0.0013	0.0013	71	1994.2677	0.0281	0.0285
27	131.5360	0.0014	0.0014	72	2124.2185	0.0308	0.0313
28	131.6064	0.0014	0.0014	73	2313.9976	0.0346	0.0352
29	131.2036	0.0014	0.0014	74	2541.6464	0.0394	0.0402
30	130.4619	0.0013	0.0013	75	2776.0431	0.0448	0.0458
31	130.5323	0.0014	0.0014	76	2980.1498	0.0503	0.0516
32	132.8161	0.0014	0.0014	77	3139.6218	0.0558	0.0574
33	138.1251	0.0014	0.0014	78	3240.1786	0.0610	0.0629
34	145.8949	0.0015	0.0015	79	3295.3034	0.0661	0.0683
35	155.1079	0.0016	0.0016	80	3326.2222	0.0714	0.0741
36	164.7613	0.0017	0.0017	81	3349.1421	0.0774	0.0806
37	174.7315	0.0018	0.0018	82	3371.3852	0.0845	0.0882
38	184.6577	0.0019	0.0019	83	3391.0616	0.0928	0.0974
39	194.9676	0.0020	0.0020	84	3398.7129	0.1026	0.1081
40	206.2669	0.0022	0.0022	85	3383.5407	0.1138	0.1206
41	219.2988	0.0023	0.0023	86	3335.4752	0.1266	0.1351
42	234.3868	0.0025	0.0025	87	3247.2267	0.1411	0.1518
43	251.8919	0.0026	0.0027	88	3116.1337	0.1576	0.1711
44	271.5703	0.0029	0.0029	89	2944.7040	0.1768	0.1939

Tabla A.2: Datos de hombres en 2010

age	d	q	m	age	d	q	m
0	821.6443	0.0082	0.0083	45	289.8829	0.0031	0.0031
1	46.0458	0.0005	0.0005	46	314.1252	0.0033	0.0033
2	38.6733	0.0004	0.0004	47	337.5545	0.0036	0.0036
3	33.7373	0.0003	0.0003	48	359.2394	0.0038	0.0038
4	24.5455	0.0002	0.0002	49	380.5144	0.0041	0.0041
5	20.7023	0.0002	0.0002	50	404.4612	0.0043	0.0044
6	19.3326	0.0002	0.0002	51	432.3533	0.0047	0.0047
7	18.0669	0.0002	0.0002	52	462.9665	0.0050	0.0050
8	16.4366	0.0002	0.0002	53	496.6522	0.0054	0.0054
9	14.5526	0.0001	0.0001	54	534.3256	0.0059	0.0059
10	13.1437	0.0001	0.0001	55	574.9970	0.0063	0.0064
11	13.4799	0.0001	0.0001	56	621.4296	0.0069	0.0069
12	17.0639	0.0002	0.0002	57	678.1790	0.0076	0.0076
13	24.7420	0.0002	0.0002	58	747.3750	0.0084	0.0084
14	35.4272	0.0004	0.0004	59	826.8971	0.0094	0.0094
15	47.3082	0.0005	0.0005	60	913.1567	0.0105	0.0105
16	58.7441	0.0006	0.0006	61	1002.7541	0.0116	0.0117
17	69.4184	0.0007	0.0007	62	1095.1083	0.0128	0.0129
18	78.5814	0.0008	0.0008	63	1188.8542	0.0141	0.0142
19	86.4317	0.0009	0.0009	64	1284.9281	0.0155	0.0156
20	94.2783	0.0010	0.0010	65	1390.6994	0.0170	0.0171
21	101.9994	0.0010	0.0010	66	1503.2789	0.0187	0.0189
22	108.0406	0.0011	0.0011	67	1612.3641	0.0204	0.0207
23	111.9599	0.0011	0.0011	68	1714.9367	0.0222	0.0224
24	114.2516	0.0012	0.0012	69	1817.4559	0.0240	0.0244
25	116.1838	0.0012	0.0012	70	1907.3334	0.0259	0.0262
26	118.1878	0.0012	0.0012	71	2011.7593	0.0280	0.0284
27	119.6138	0.0012	0.0012	72	2174.6907	0.0312	0.0316
28	120.5259	0.0012	0.0012	73	2414.7006	0.0357	0.0363
29	121.3122	0.0012	0.0012	74	2702.2846	0.0414	0.0423
30	121.9314	0.0012	0.0012	75	3001.8616	0.0480	0.0492
31	123.2927	0.0013	0.0013	76	3257.7823	0.0547	0.0563
32	126.6537	0.0013	0.0013	77	3438.3986	0.0611	0.0630
33	132.6905	0.0014	0.0014	78	3521.2232	0.0667	0.0689
34	140.8985	0.0014	0.0015	79	3532.5391	0.0716	0.0743
35	150.5484	0.0016	0.0016	80	3512.0909	0.0767	0.0798
36	160.6311	0.0017	0.0017	81	3490.7527	0.0826	0.0862
37	170.7216	0.0018	0.0018	82	3483.8220	0.0898	0.0941
38	180.3870	0.0019	0.0019	83	3490.1858	0.0989	0.1040
39	190.1755	0.0020	0.0020	84	3494.6254	0.1099	0.1163
40	200.6211	0.0021	0.0021	85	3478.4691	0.1229	0.1309
41	212.8490	0.0022	0.0022	86	3423.0661	0.1379	0.1481
42	227.7057	0.0024	0.0024	87	3313.4691	0.1548	0.1678
43	245.8048	0.0026	0.0026	88	3141.7672	0.1737	0.1902
44	266.5694	0.0028	0.0028	89	2907.3955	0.1945	0.2154

Tabla A.3: Datos de hombres en 2011

age	d	q	m	age	d	q	m
0	812.7854	0.0081	0.0082	45	260.3373	0.0027	0.0027
1	38.8637	0.0004	0.0004	46	282.0534	0.0030	0.0030
2	32.7234	0.0003	0.0003	47	304.2325	0.0032	0.0032
3	28.5519	0.0003	0.0003	48	326.2774	0.0035	0.0035
4	20.8634	0.0002	0.0002	49	349.1690	0.0037	0.0037
5	16.3306	0.0002	0.0002	50	374.7327	0.0040	0.0040
6	15.4629	0.0002	0.0002	51	404.2021	0.0043	0.0043
7	14.8837	0.0001	0.0001	52	437.4571	0.0047	0.0047
8	14.1785	0.0001	0.0001	53	475.0291	0.0052	0.0052
9	13.4160	0.0001	0.0001	54	517.1463	0.0056	0.0056
10	13.1798	0.0001	0.0001	55	562.8099	0.0062	0.0062
11	14.5052	0.0001	0.0001	56	613.0576	0.0068	0.0068
12	18.6207	0.0002	0.0002	57	670.2827	0.0074	0.0075
13	26.2077	0.0003	0.0003	58	735.4640	0.0082	0.0083
14	36.3359	0.0004	0.0004	59	807.6337	0.0091	0.0092
15	47.3975	0.0005	0.0005	60	884.8546	0.0101	0.0101
16	58.0582	0.0006	0.0006	61	965.8090	0.0111	0.0112
17	68.1647	0.0007	0.0007	62	1050.7789	0.0122	0.0123
18	77.1144	0.0008	0.0008	63	1139.3287	0.0134	0.0135
19	84.9587	0.0009	0.0009	64	1231.5172	0.0147	0.0148
20	93.0139	0.0009	0.0009	65	1330.3000	0.0161	0.0162
21	100.7205	0.0010	0.0010	66	1433.6969	0.0176	0.0178
22	106.0140	0.0011	0.0011	67	1536.5681	0.0192	0.0194
23	108.1904	0.0011	0.0011	68	1637.1866	0.0209	0.0211
24	108.1177	0.0011	0.0011	69	1738.7351	0.0227	0.0230
25	107.3680	0.0011	0.0011	70	1841.6708	0.0246	0.0249
26	107.1654	0.0011	0.0011	71	1954.2006	0.0267	0.0271
27	107.5357	0.0011	0.0011	72	2085.7547	0.0293	0.0298
28	108.9976	0.0011	0.0011	73	2241.1841	0.0325	0.0330
29	111.5129	0.0011	0.0011	74	2414.2032	0.0362	0.0368
30	113.9792	0.0012	0.0012	75	2577.0041	0.0400	0.0409
31	116.8666	0.0012	0.0012	76	2734.2931	0.0443	0.0453
32	121.9125	0.0012	0.0012	77	2917.1904	0.0494	0.0507
33	129.7131	0.0013	0.0013	78	3133.3222	0.0558	0.0574
34	139.5516	0.0014	0.0014	79	3361.8166	0.0634	0.0655
35	151.0810	0.0016	0.0016	80	3570.9792	0.0720	0.0746
36	162.5388	0.0017	0.0017	81	3732.0406	0.0810	0.0844
37	172.1703	0.0018	0.0018	82	3825.5587	0.0904	0.0946
38	178.9497	0.0019	0.0019	83	3844.3394	0.0998	0.1051
39	184.0935	0.0019	0.0019	84	3793.6149	0.1095	0.1158
40	189.3882	0.0020	0.0020	85	3684.3298	0.1194	0.1269
41	196.8947	0.0020	0.0021	86	3531.2578	0.1299	0.1389
42	207.4129	0.0022	0.0022	87	3351.3835	0.1417	0.1525
43	221.9288	0.0023	0.0023	88	3163.2541	0.1558	0.1690
44	239.8306	0.0025	0.0025	89	2991.0006	0.1745	0.1912

Tabla A.4: Datos de hombres en 2012

age	d	q	m	age	d	q	m
0	890.5510	0.0089	0.0090	45	293.6414	0.0031	0.0031
1	48.2908	0.0005	0.0005	46	317.1538	0.0034	0.0034
2	40.8450	0.0004	0.0004	47	340.8546	0.0036	0.0036
3	35.5761	0.0004	0.0004	48	364.1749	0.0039	0.0039
4	26.2904	0.0003	0.0003	49	388.1232	0.0042	0.0042
5	19.0709	0.0002	0.0002	50	414.7441	0.0045	0.0045
6	17.8320	0.0002	0.0002	51	445.1486	0.0048	0.0048
7	16.8617	0.0002	0.0002	52	478.8940	0.0052	0.0052
8	15.7428	0.0002	0.0002	53	516.4162	0.0056	0.0057
9	14.5712	0.0001	0.0001	54	558.2059	0.0061	0.0062
10	13.9896	0.0001	0.0001	55	603.8712	0.0067	0.0067
11	15.1196	0.0001	0.0001	56	654.6536	0.0073	0.0073
12	19.2887	0.0002	0.0002	57	712.6808	0.0080	0.0080
13	27.2432	0.0003	0.0003	58	778.9918	0.0088	0.0089
14	38.0187	0.0004	0.0004	59	852.8936	0.0097	0.0098
15	49.8436	0.0005	0.0005	60	930.5762	0.0107	0.0108
16	61.3934	0.0006	0.0006	61	1012.8260	0.0118	0.0119
17	72.6885	0.0007	0.0007	62	1104.1950	0.0130	0.0131
18	83.1684	0.0008	0.0008	63	1205.8789	0.0144	0.0145
19	92.8025	0.0009	0.0009	64	1315.2624	0.0159	0.0161
20	102.5507	0.0010	0.0010	65	1434.9419	0.0177	0.0178
21	111.9136	0.0011	0.0011	66	1555.8964	0.0195	0.0197
22	119.2091	0.0012	0.0012	67	1664.9084	0.0213	0.0215
23	123.8167	0.0013	0.0013	68	1756.0979	0.0230	0.0232
24	126.3254	0.0013	0.0013	69	1838.0726	0.0246	0.0249
25	128.3880	0.0013	0.0013	70	1909.1708	0.0262	0.0265
26	130.4606	0.0013	0.0013	71	1994.2677	0.0281	0.0285
27	131.5360	0.0014	0.0014	72	2124.2185	0.0308	0.0313
28	131.6064	0.0014	0.0014	73	2313.9976	0.0346	0.0352
29	131.2036	0.0014	0.0014	74	2541.6464	0.0394	0.0402
30	130.4619	0.0013	0.0013	75	2776.0431	0.0448	0.0458
31	130.5323	0.0014	0.0014	76	2980.1498	0.0503	0.0516
32	132.8161	0.0014	0.0014	77	3139.6218	0.0558	0.0574
33	138.1251	0.0014	0.0014	78	3240.1786	0.0610	0.0629
34	145.8949	0.0015	0.0015	79	3295.3034	0.0661	0.0683
35	155.1079	0.0016	0.0016	80	3326.2222	0.0714	0.0741
36	164.7613	0.0017	0.0017	81	3349.1421	0.0774	0.0806
37	174.7315	0.0018	0.0018	82	3371.3852	0.0845	0.0882
38	184.6577	0.0019	0.0019	83	3391.0616	0.0928	0.0974
39	194.9676	0.0020	0.0020	84	3398.7129	0.1026	0.1081
40	206.2669	0.0022	0.0022	85	3383.5407	0.1138	0.1206
41	219.2988	0.0023	0.0023	86	3335.4752	0.1266	0.1351
42	234.3868	0.0025	0.0025	87	3247.2267	0.1411	0.1518
43	251.8919	0.0026	0.0027	88	3116.1337	0.1576	0.1711
44	271.5703	0.0029	0.0029	89	2944.7040	0.1768	0.1939

Tabla A.5: Datos de mujeres en 2009

age	d	q	m	age	d	q	m
0	890.5510	0.0089	0.0090	45	293.6414	0.0031	0.0031
1	48.2908	0.0005	0.0005	46	317.1538	0.0034	0.0034
2	40.8450	0.0004	0.0004	47	340.8546	0.0036	0.0036
3	35.5761	0.0004	0.0004	48	364.1749	0.0039	0.0039
4	26.2904	0.0003	0.0003	49	388.1232	0.0042	0.0042
5	19.0709	0.0002	0.0002	50	414.7441	0.0045	0.0045
6	17.8320	0.0002	0.0002	51	445.1486	0.0048	0.0048
7	16.8617	0.0002	0.0002	52	478.8940	0.0052	0.0052
8	15.7428	0.0002	0.0002	53	516.4162	0.0056	0.0057
9	14.5712	0.0001	0.0001	54	558.2059	0.0061	0.0062
10	13.9896	0.0001	0.0001	55	603.8712	0.0067	0.0067
11	15.1196	0.0001	0.0001	56	654.6536	0.0073	0.0073
12	19.2887	0.0002	0.0002	57	712.6808	0.0080	0.0080
13	27.2432	0.0003	0.0003	58	778.9918	0.0088	0.0089
14	38.0187	0.0004	0.0004	59	852.8936	0.0097	0.0098
15	49.8436	0.0005	0.0005	60	930.5762	0.0107	0.0108
16	61.3934	0.0006	0.0006	61	1012.8260	0.0118	0.0119
17	72.6885	0.0007	0.0007	62	1104.1950	0.0130	0.0131
18	83.1684	0.0008	0.0008	63	1205.8789	0.0144	0.0145
19	92.8025	0.0009	0.0009	64	1315.2624	0.0159	0.0161
20	102.5507	0.0010	0.0010	65	1434.9419	0.0177	0.0178
21	111.9136	0.0011	0.0011	66	1555.8964	0.0195	0.0197
22	119.2091	0.0012	0.0012	67	1664.9084	0.0213	0.0215
23	123.8167	0.0013	0.0013	68	1756.0979	0.0230	0.0232
24	126.3254	0.0013	0.0013	69	1838.0726	0.0246	0.0249
25	128.3880	0.0013	0.0013	70	1909.1708	0.0262	0.0265
26	130.4606	0.0013	0.0013	71	1994.2677	0.0281	0.0285
27	131.5360	0.0014	0.0014	72	2124.2185	0.0308	0.0313
28	131.6064	0.0014	0.0014	73	2313.9976	0.0346	0.0352
29	131.2036	0.0014	0.0014	74	2541.6464	0.0394	0.0402
30	130.4619	0.0013	0.0013	75	2776.0431	0.0448	0.0458
31	130.5323	0.0014	0.0014	76	2980.1498	0.0503	0.0516
32	132.8161	0.0014	0.0014	77	3139.6218	0.0558	0.0574
33	138.1251	0.0014	0.0014	78	3240.1786	0.0610	0.0629
34	145.8949	0.0015	0.0015	79	3295.3034	0.0661	0.0683
35	155.1079	0.0016	0.0016	80	3326.2222	0.0714	0.0741
36	164.7613	0.0017	0.0017	81	3349.1421	0.0774	0.0806
37	174.7315	0.0018	0.0018	82	3371.3852	0.0845	0.0882
38	184.6577	0.0019	0.0019	83	3391.0616	0.0928	0.0974
39	194.9676	0.0020	0.0020	84	3398.7129	0.1026	0.1081
40	206.2669	0.0022	0.0022	85	3383.5407	0.1138	0.1206
41	219.2988	0.0023	0.0023	86	3335.4752	0.1266	0.1351
42	234.3868	0.0025	0.0025	87	3247.2267	0.1411	0.1518
43	251.8919	0.0026	0.0027	88	3116.1337	0.1576	0.1711
44	271.5703	0.0029	0.0029	89	2944.7040	0.1768	0.1939

Tabla A.6: Datos de mujeres en 2010

age	d	q	m	age	d	q	m
0	821.6443	0.0082	0.0083	45	289.8829	0.0031	0.0031
1	46.0458	0.0005	0.0005	46	314.1252	0.0033	0.0033
2	38.6733	0.0004	0.0004	47	337.5545	0.0036	0.0036
3	33.7373	0.0003	0.0003	48	359.2394	0.0038	0.0038
4	24.5455	0.0002	0.0002	49	380.5144	0.0041	0.0041
5	20.7023	0.0002	0.0002	50	404.4612	0.0043	0.0044
6	19.3326	0.0002	0.0002	51	432.3533	0.0047	0.0047
7	18.0669	0.0002	0.0002	52	462.9665	0.0050	0.0050
8	16.4366	0.0002	0.0002	53	496.6522	0.0054	0.0054
9	14.5526	0.0001	0.0001	54	534.3256	0.0059	0.0059
10	13.1437	0.0001	0.0001	55	574.9970	0.0063	0.0064
11	13.4799	0.0001	0.0001	56	621.4296	0.0069	0.0069
12	17.0639	0.0002	0.0002	57	678.1790	0.0076	0.0076
13	24.7420	0.0002	0.0002	58	747.3750	0.0084	0.0084
14	35.4272	0.0004	0.0004	59	826.8971	0.0094	0.0094
15	47.3082	0.0005	0.0005	60	913.1567	0.0105	0.0105
16	58.7441	0.0006	0.0006	61	1002.7541	0.0116	0.0117
17	69.4184	0.0007	0.0007	62	1095.1083	0.0128	0.0129
18	78.5814	0.0008	0.0008	63	1188.8542	0.0141	0.0142
19	86.4317	0.0009	0.0009	64	1284.9281	0.0155	0.0156
20	94.2783	0.0010	0.0010	65	1390.6994	0.0170	0.0171
21	101.9994	0.0010	0.0010	66	1503.2789	0.0187	0.0189
22	108.0406	0.0011	0.0011	67	1612.3641	0.0204	0.0207
23	111.9599	0.0011	0.0011	68	1714.9367	0.0222	0.0224
24	114.2516	0.0012	0.0012	69	1817.4559	0.0240	0.0244
25	116.1838	0.0012	0.0012	70	1907.3334	0.0259	0.0262
26	118.1878	0.0012	0.0012	71	2011.7593	0.0280	0.0284
27	119.6138	0.0012	0.0012	72	2174.6907	0.0312	0.0316
28	120.5259	0.0012	0.0012	73	2414.7006	0.0357	0.0363
29	121.3122	0.0012	0.0012	74	2702.2846	0.0414	0.0423
30	121.9314	0.0012	0.0012	75	3001.8616	0.0480	0.0492
31	123.2927	0.0013	0.0013	76	3257.7823	0.0547	0.0563
32	126.6537	0.0013	0.0013	77	3438.3986	0.0611	0.0630
33	132.6905	0.0014	0.0014	78	3521.2232	0.0667	0.0689
34	140.8985	0.0014	0.0015	79	3532.5391	0.0716	0.0743
35	150.5484	0.0016	0.0016	80	3512.0909	0.0767	0.0798
36	160.6311	0.0017	0.0017	81	3490.7527	0.0826	0.0862
37	170.7216	0.0018	0.0018	82	3483.8220	0.0898	0.0941
38	180.3870	0.0019	0.0019	83	3490.1858	0.0989	0.1040
39	190.1755	0.0020	0.0020	84	3494.6254	0.1099	0.1163
40	200.6211	0.0021	0.0021	85	3478.4691	0.1229	0.1309
41	212.8490	0.0022	0.0022	86	3423.0661	0.1379	0.1481
42	227.7057	0.0024	0.0024	87	3313.4691	0.1548	0.1678
43	245.8048	0.0026	0.0026	88	3141.7672	0.1737	0.1902
44	266.5694	0.0028	0.0028	89	2907.3955	0.1945	0.2154

Tabla A.7: Datos de mujeres en 2011

age	d	q	m	age	d	q	m
0	812.7854	0.0081	0.0082	45	260.3373	0.0027	0.0027
1	38.8637	0.0004	0.0004	46	282.0534	0.0030	0.0030
2	32.7234	0.0003	0.0003	47	304.2325	0.0032	0.0032
3	28.5519	0.0003	0.0003	48	326.2774	0.0035	0.0035
4	20.8634	0.0002	0.0002	49	349.1690	0.0037	0.0037
5	16.3306	0.0002	0.0002	50	374.7327	0.0040	0.0040
6	15.4629	0.0002	0.0002	51	404.2021	0.0043	0.0043
7	14.8837	0.0001	0.0001	52	437.4571	0.0047	0.0047
8	14.1785	0.0001	0.0001	53	475.0291	0.0052	0.0052
9	13.4160	0.0001	0.0001	54	517.1463	0.0056	0.0056
10	13.1798	0.0001	0.0001	55	562.8099	0.0062	0.0062
11	14.5052	0.0001	0.0001	56	613.0576	0.0068	0.0068
12	18.6207	0.0002	0.0002	57	670.2827	0.0074	0.0075
13	26.2077	0.0003	0.0003	58	735.4640	0.0082	0.0083
14	36.3359	0.0004	0.0004	59	807.6337	0.0091	0.0092
15	47.3975	0.0005	0.0005	60	884.8546	0.0101	0.0101
16	58.0582	0.0006	0.0006	61	965.8090	0.0111	0.0112
17	68.1647	0.0007	0.0007	62	1050.7789	0.0122	0.0123
18	77.1144	0.0008	0.0008	63	1139.3287	0.0134	0.0135
19	84.9587	0.0009	0.0009	64	1231.5172	0.0147	0.0148
20	93.0139	0.0009	0.0009	65	1330.3000	0.0161	0.0162
21	100.7205	0.0010	0.0010	66	1433.6969	0.0176	0.0178
22	106.0140	0.0011	0.0011	67	1536.5681	0.0192	0.0194
23	108.1904	0.0011	0.0011	68	1637.1866	0.0209	0.0211
24	108.1177	0.0011	0.0011	69	1738.7351	0.0227	0.0230
25	107.3680	0.0011	0.0011	70	1841.6708	0.0246	0.0249
26	107.1654	0.0011	0.0011	71	1954.2006	0.0267	0.0271
27	107.5357	0.0011	0.0011	72	2085.7547	0.0293	0.0298
28	108.9976	0.0011	0.0011	73	2241.1841	0.0325	0.0330
29	111.5129	0.0011	0.0011	74	2414.2032	0.0362	0.0368
30	113.9792	0.0012	0.0012	75	2577.0041	0.0400	0.0409
31	116.8666	0.0012	0.0012	76	2734.2931	0.0443	0.0453
32	121.9125	0.0012	0.0012	77	2917.1904	0.0494	0.0507
33	129.7131	0.0013	0.0013	78	3133.3222	0.0558	0.0574
34	139.5516	0.0014	0.0014	79	3361.8166	0.0634	0.0655
35	151.0810	0.0016	0.0016	80	3570.9792	0.0720	0.0746
36	162.5388	0.0017	0.0017	81	3732.0406	0.0810	0.0844
37	172.1703	0.0018	0.0018	82	3825.5587	0.0904	0.0946
38	178.9497	0.0019	0.0019	83	3844.3394	0.0998	0.1051
39	184.0935	0.0019	0.0019	84	3793.6149	0.1095	0.1158
40	189.3882	0.0020	0.0020	85	3684.3298	0.1194	0.1269
41	196.8947	0.0020	0.0021	86	3531.2578	0.1299	0.1389
42	207.4129	0.0022	0.0022	87	3351.3835	0.1417	0.1525
43	221.9288	0.0023	0.0023	88	3163.2541	0.1558	0.1690
44	239.8306	0.0025	0.0025	89	2991.0006	0.1745	0.1912

Tabla A.8: Datos de mujeres en 2012

age	d	q	m	age	d	q	m
0	890.5510	0.0089	0.0090	45	293.6414	0.0031	0.0031
1	48.2908	0.0005	0.0005	46	317.1538	0.0034	0.0034
2	40.8450	0.0004	0.0004	47	340.8546	0.0036	0.0036
3	35.5761	0.0004	0.0004	48	364.1749	0.0039	0.0039
4	26.2904	0.0003	0.0003	49	388.1232	0.0042	0.0042
5	19.0709	0.0002	0.0002	50	414.7441	0.0045	0.0045
6	17.8320	0.0002	0.0002	51	445.1486	0.0048	0.0048
7	16.8617	0.0002	0.0002	52	478.8940	0.0052	0.0052
8	15.7428	0.0002	0.0002	53	516.4162	0.0056	0.0057
9	14.5712	0.0001	0.0001	54	558.2059	0.0061	0.0062
10	13.9896	0.0001	0.0001	55	603.8712	0.0067	0.0067
11	15.1196	0.0001	0.0001	56	654.6536	0.0073	0.0073
12	19.2887	0.0002	0.0002	57	712.6808	0.0080	0.0080
13	27.2432	0.0003	0.0003	58	778.9918	0.0088	0.0089
14	38.0187	0.0004	0.0004	59	852.8936	0.0097	0.0098
15	49.8436	0.0005	0.0005	60	930.5762	0.0107	0.0108
16	61.3934	0.0006	0.0006	61	1012.8260	0.0118	0.0119
17	72.6885	0.0007	0.0007	62	1104.1950	0.0130	0.0131
18	83.1684	0.0008	0.0008	63	1205.8789	0.0144	0.0145
19	92.8025	0.0009	0.0009	64	1315.2624	0.0159	0.0161
20	102.5507	0.0010	0.0010	65	1434.9419	0.0177	0.0178
21	111.9136	0.0011	0.0011	66	1555.8964	0.0195	0.0197
22	119.2091	0.0012	0.0012	67	1664.9084	0.0213	0.0215
23	123.8167	0.0013	0.0013	68	1756.0979	0.0230	0.0232
24	126.3254	0.0013	0.0013	69	1838.0726	0.0246	0.0249
25	128.3880	0.0013	0.0013	70	1909.1708	0.0262	0.0265
26	130.4606	0.0013	0.0013	71	1994.2677	0.0281	0.0285
27	131.5360	0.0014	0.0014	72	2124.2185	0.0308	0.0313
28	131.6064	0.0014	0.0014	73	2313.9976	0.0346	0.0352
29	131.2036	0.0014	0.0014	74	2541.6464	0.0394	0.0402
30	130.4619	0.0013	0.0013	75	2776.0431	0.0448	0.0458
31	130.5323	0.0014	0.0014	76	2980.1498	0.0503	0.0516
32	132.8161	0.0014	0.0014	77	3139.6218	0.0558	0.0574
33	138.1251	0.0014	0.0014	78	3240.1786	0.0610	0.0629
34	145.8949	0.0015	0.0015	79	3295.3034	0.0661	0.0683
35	155.1079	0.0016	0.0016	80	3326.2222	0.0714	0.0741
36	164.7613	0.0017	0.0017	81	3349.1421	0.0774	0.0806
37	174.7315	0.0018	0.0018	82	3371.3852	0.0845	0.0882
38	184.6577	0.0019	0.0019	83	3391.0616	0.0928	0.0974
39	194.9676	0.0020	0.0020	84	3398.7129	0.1026	0.1081
40	206.2669	0.0022	0.0022	85	3383.5407	0.1138	0.1206
41	219.2988	0.0023	0.0023	86	3335.4752	0.1266	0.1351
42	234.3868	0.0025	0.0025	87	3247.2267	0.1411	0.1518
43	251.8919	0.0026	0.0027	88	3116.1337	0.1576	0.1711
44	271.5703	0.0029	0.0029	89	2944.7040	0.1768	0.1939

Anexo B

Tablas de mortalidad M95

A continuación presentamos los datos de las tablas de mortalidad M95 que se han utilizado en el capítulo 5. Estas tablas fueron elaboradas por la Superintendencia de Valores y Seguros de Chile mediante el modelo de Makeham, de tal manera que:

$$p_x = s \cdot g^{c^x(c-1)}$$

donde x es la edad expresada en años, los valores de las constantes para el caso de los hombres son $c = 1.098834072$, $g = 0.999555169$, $s = 1.000435654$, y para las mujeres son $c = 1.113860526$, $g = 0.999922033$ y $s = 0.998774796$.

La siguiente tabla contiene los valores de: la probabilidad de fallecimiento a un año para los hombres que denotamos como qh , la probabilidad de fallecimiento a un año para las mujeres que denotamos como qm , la probabilidad de supervivencia a un año para los hombres que denotamos como ph y la probabilidad de supervivencia a un año para las mujeres que denotamos como pm para las edades entre 65 y 79 años.

edad	qh	ph	qm	pm
65	0.0195	0.9805	0.0110	0.9890
66	0.0214	0.9786	0.0121	0.9879
67	0.0236	0.9764	0.0133	0.9867
68	0.0259	0.9741	0.0147	0.9853
69	0.0285	0.9715	0.0162	0.9838
70	0.0313	0.9687	0.0179	0.9821
71	0.0344	0.9656	0.0198	0.9802
72	0.0378	0.9622	0.0219	0.9781
73	0.0415	0.9585	0.0242	0.9758
74	0.0455	0.9545	0.0268	0.9732
75	0.0499	0.9501	0.0297	0.9703
76	0.0548	0.9452	0.0328	0.9672
77	0.0601	0.9399	0.0364	0.9636
78	0.0658	0.9342	0.0403	0.9597
79	0.0721	0.9279	0.0447	0.9553

Anexo C

Códigos de R

```
library("demography")
Chiledata <- hmd.mx(country = "CHL", username = "XXX", password = "XXX", label = "CHILE")

library(StMoMo)
# creamos un objeto StMoMo, solo con hombres
CHLStMoMo<-StMoMoData(Chiledata,series="male")
# creamos un objeto StMoMo, solo con mujeres
CHLStMoMo1<-StMoMoData(Chiledata,series="female")

# gráfico tasas de mortalidad
par(mfrow=c(1,2))
plot(Chiledata,series="male",datatype="rate", main="Tasa de mortalidad hombres")
plot(Chiledata,series="female",datatype="rate", main="Tasa de mortalidad mujeres")

# ajuste LC original con paquete demography y graficamos los parámetros
#hombres
LC.gauss<-lca(Chiledata,series="male",max.age=90)
#mujeres
LC.gauss1<-lca(Chiledata,series="female",max.age=90)
#gráficos
par(mfrow=c(1,3))
plot(LC.gauss$ax, main="ax", xlab="Age",ylab="ax",type="l",col="blue", ylim=c(-9,-1))
lines(x=LC.gauss$age, y=LC.gauss1$ax, main="ax", col="red", ylim=c(-9,-1))
legend("topleft" , c("Mujeres","Hombres"),cex=0.8,col=c("red","blue"),lty=1);
plot(LC.gauss$bx, main="bx", xlab="Age",ylab="bx",type="l",col="blue", ylim=c(0,0.035))
lines(x=LC.gauss$age, y=LC.gauss1$bx, main="bx", col="red", ylim=c(0,0.035))
legend("topright" , c("Mujeres","Hombres"),cex=0.8,col=c("red","blue"),lty=1);
plot(LC.gauss$kt, main="kt", xlab="Year",ylab="kt",type="l",col="blue", ylim=c(-20,20))
lines(x=LC.gauss$year, y=LC.gauss1$kt, main="kt", col="red", ylim=c(-20,20))
legend("topright" , c("Mujeres","Hombres"),cex=0.8,col=c("red","blue"),lty=1)
```

```

#gráficos de contornos de los residuos Lee-Carter Gaussiano por sexo
par(mfrow=c(1,2))
plot(residuals(LC.gauss), main="Residuos hombres")
plot(residuals(LC.gauss1), main = "Residuos mujeres")

# LC GAPC Binomial hombres
LCBi<-lc(link="logit")
CHLMaleIniData<-central2initial(CHLStMoMo)
LCBifit<-fit(LCBi, data=CHLMaleIniData, ages.fit = 0:90, years.fit = 1992:2008)

# LC GAPC Binomial mujeres
LCBi1<-lc(link="logit")
CHLFEIniData<-central2initial(CHLStMoMo1)
LCBi1fit<-fit(LCBi1, data=CHLFEIniData, ages.fit = 0:90, years.fit = 1992:2008)

## LC GAPC Poisson hombres
LCPo<-lc(link="log")
LCPofit<-fit(LCPo, data=CHLStMoMo, ages.fit = 0:90, years.fit = 1992:2008)

# LC GAPC Poisson mujeres
LCPo1<-lc(link="log")
LCPo1fit<-fit(LCPo1, data=CHLStMoMo1, ages.fit = 0:90, years.fit = 1992:2008)

# gráficos desviación residual
LCBires<-residuals(LCBifit)
LCBi1res<-residuals(LCBi1fit)
plot(LCBires,type="scatter",reslim=c(-5,5), main="Hombres")
plot(LCBi1res,type="scatter",reslim=c(-5,5), main="Mujeres")

LCPores<-residuals(LCPofit)
plot(LCPores,type="scatter",reslim=c(-5,5), main="hombres")
LCPo1res<-residuals(LCPo1fit)
plot(LCPo1res,type="scatter",reslim=c(-5,5), main="mujeres")

# LC GAPC Binomial hombres y mujeres
AIC(LCBifit)
BIC(LCBifit)
AIC(LCBi1fit)
BIC(LCBi1fit)

#LC GAPC Poisson hombres y mujeres
AIC(LCPofit)
BIC(LCPofit)
AIC(LCPo1fit)
BIC(LCPo1fit)

# gráfico parámetros modelo Lee-Carter con entorno Binomial
par(mfrow=c(1,3))
plot(LCBifit$ax, main="ax", xlab="Age", ylab="ax", type="l", col="blue", ylim = c(-9,0))

```

```

lines(x=LCBifit$ages, y=LCBi1fit$ax, main="ax", col="red")
legend("topleft" , c("Mujeres","Hombres"),cex=0.8,col=c("red","blue"),lty=1);
plot(LCBifit$bx, main="bx", xlab="Age",ylab="bx",type="l",col="blue")
lines(x=LCBifit$ages, y=LCBi1fit$bx, main="bx", col="red")
legend("topright" , c("Mujeres","Hombres"),cex=0.8,col=c("red","blue"),lty=1)
plot(x=LCBifit$years,y=LCBifit$kt[1,],main="kt", xlab="Years",ylab="kt",type="l",
col="blue",ylim=c(-17,17))
par(new=TRUE)
plot(x=LCBi1fit$years, y=LCBi1fit$kt[1,],main="kt", xlab="Years",ylab="kt",type="l",
col="red",ylim=c(-17,17))
lines(x=LCBi1fit$years,y=LCBifit$kt[1,], main="kt", col="red")
legend("topright" , c("Mujeres","Hombres"),cex=0.8,col=c("red","blue"),lty=1)

# RH GAPC Binomial hombres y mujeres
RHBi <- rh(link = "logit", cohortAgeFun = "1", approxConst = TRUE)
RHBifit <- fit(RHBi, data=CHLMaleIniData, ages.fit = 0:90, years.fit = 1992:2008,
start.ax = LCBifit$ax, start.bx = LCBifit$bx, start.kt = LCBifit$kt)
RHBi1fit <- fit(RHBi, data=CHLFEIniData, ages.fit = 0:90, years.fit = 1992:2008,
start.ax = LCBi1fit$ax, start.bx = LCBi1fit$bx, start.kt = LCBi1fit$kt)

# RH GAPC Poisson hombres y mujeres
RHPo <- rh(link = "log", cohortAgeFun = "1", approxConst = TRUE)
RHPofit <- fit(RHPo, data=CHLStMoMo, ages.fit = 0:90, years.fit = 1992:2008,
start.ax = LCPofit$ax, start.bx = LCPofit$bx, start.kt = LCPofit$kt)
RHPo1fit <- fit(RHPo, data=CHLStMoMo1, ages.fit = 0:90, years.fit = 1992:2008,
start.ax = LCPo1fit$ax, start.bx = LCPo1fit$bx, start.kt = LCPo1fit$kt)

# Desvianza residual RH GAPC Binomial hombres y mujeres
RHBires<-residuals(RHBifit)
plot(RHBires,type="scatter",reslim=c(-6,6))
RHBi1res<-residuals(RHBi1fit)
plot(RHBi1res,type="scatter",reslim=c(-6,6))

# Desvianza residual RH GAPC Poisson hombres y mujeres
RHPores<-residuals(RHPofit)
plot(RHPores,type="scatter",reslim=c(-5,5), main="hombres")
RHPo1res<-residuals(RHPo1fit)
plot(RHPo1res,type="scatter",reslim=c(-5,5), main="mujeres")

# RH GAPC Binomial hombres y mujeres
AIC(RHBifit)
BIC(RHBifit)
AIC(RHBi1fit)
BIC(RHBi1fit)

# RH GAPC Poisson hombres y mujeres
AIC(RHPofit)
BIC(RHPofit)
AIC(RHPo1fit)

```



```

BIC(RHBPo1fit)

# gráficos parámetros del modelo Renshaw-Haberman con entorno Binomial
par(mfrow=c(2,2))
plot(RHBifit$ax, main="ax", xlab="Age", ylab="ax", type="l", col="blue", ylim=c(-9,0))
lines(x=RHBifit$ages, y=RHBifit$ax, main="ax", col="red", ylim=c(-9,0))
legend("topleft", c("Mujeres", "Hombres"), cex=0.8, col=c("red", "blue"), lty=1)
plot(RHBifit$bx, main="bx", xlab="Age", ylab="bx", type="l", col="blue", ylim=c(-0.01,0.05))
lines(x=RHBifit$ages, y=RHBifit$bx, main="bx", col="red", ylim=c(-0.01,0.05))
legend("topleft", c("Mujeres", "Hombres"), cex=0.8, col=c("red", "blue"), lty=1)
plot(x=RHBifit$years, y=RHBifit$kt[1,], main="kt", xlab="Years", ylab="kt", type="l",
col="blue", ylim=c(-20,25))
par(new=TRUE)
plot(x=RHBifit$years, y=RHBifit$kt[1,], main="kt", xlab="Years", ylab="kt", type="l",
col="red", ylim=c(-20,25))
legend("topright", c("Mujeres", "Hombres"), cex=0.8, col=c("red", "blue"), lty=1)
plot(x=RHBifit$cohorts, y=RHBifit$gc, main="cohorte", xlab="Cohorte", ylab="gc",
type="l", col="blue", ylim=c(-1.5,1.5))
par(new=TRUE)
plot(x=RHBifit$cohorts, y=RHBifit$gc, main="cohorte", xlab="Cohorte", ylab="gc",
type="l", col="red", ylim=c(-1.5,1.5))
legend("topright", c("Mujeres", "Hombres"), cex=0.8, col=c("red", "blue"), lty=1)

# CBD GAPC Binomial hombres y mujeres
CBDBi<- cbd(link="logit")
CBDBifit <- fit(CBDBi, data=CHLMaleIniData, ages.fit = 0:90, years.fit = 1992:2008)
CBDBilfit <- fit(CBDBi, data=CHLFEIniData, ages.fit = 0:90, years.fit = 1992:2008)

# CBD GAPC Poisson hombres y mujeres
CBDPo<- cbd(link="log")
CBDPofit <- fit(CBDPo, data=CHLStMoMo, ages.fit = 0:90, years.fit = 1992:2008)
CBDPo1fit <- fit(CBDPo, data=CHLStMoMo1, ages.fit = 0:90, years.fit = 1992:2008)

# Desvianza residual CBD Binomial hombres y mujeres
CBDBires<-residuals(CBDBifit)
plot(CBDBires,type="scatter",reslim=c(-2,2))
CBDBilres<-residuals(CBDBilfit)
plot(CBDBilres,type="scatter",reslim=c(-2,2))

# Desvianza residual CBD Poisson hombres y mujeres
CBDPores<-residuals(CBDPofit)
plot(CBDPores,type="scatter",reslim=c(-2,2))
CBDPo1res<-residuals(CBDPo1fit)
plot(CBDPo1res,type="scatter",reslim=c(-2,2))

# CBD GAPC Binomial hombres y mujeres
AIC(CBDBifit)
BIC(CBDBifit)
AIC(CBDBilfit)

```

```

BIC(CBDBi1fit)

# CBD GAPC Poisson hombres y mujeres
AIC(CBDPofit)
BIC(CBDPofit)
AIC(CBDPo1fit)
BIC(CBDPo1fit)

# gráfico parámetros del modelo CBD con entorno Poisson
par(mfrow=c(1,2))
plot(x=CBDPofit$years,y=CBDPofit$kt[1,],main="kt1", xlab="Years",ylab="kt1",
type="l",col="blue", ylim=c(-6.2,-5))
par(new=TRUE)
plot(x=CBDPo1fit$years, y=CBDPo1fit$kt[1,],main="kt1", xlab="Years",ylab="kt1",
type="l",col="red", ylim=c(-6.2,-5))
legend("topright" , c("Mujeres","Hombres"),cex=0.8,col=c("red","blue"),lty=1)
plot(x=CBDPofit$years,y=CBDPofit$kt[2,],main="kt2", xlab="Years",ylab="kt2",
type="l",col="blue", ylim=c(0.067,0.09))
par(new=TRUE)
plot(x=CBDPo1fit$years, y=CBDPo1fit$kt[2,],main="kt2", xlab="Years",ylab="kt2",
type="l",col="red", ylim=c(0.067,0.09))
legend("topleft" , c("Mujeres","Hombres"),cex=0.8,col=c("red","blue"),lty=1)

# ECM y EPAM hombres
d.est.LCBi <- fitted(LCBifit, type = "deaths")
d.est.RHBi <- fitted(RHBifit, type = "deaths")
d.est.CBDPo <- fitted(CBDPofit, type = "deaths")

ECMLCBi<-sqrt(mean((d.est.LCBi-LCBifit$Dxt)^2))
ECMRHBi<-sqrt(mean((d.est.RHBi-RHBifit$Dxt)^2))
ECMCBDPo<-sqrt(mean((d.est.CBDPo-CBDPofit$Dxt)^2))

EPAMLCBi<-mean(abs((d.est.LCBi-LCBifit$Dxt)/d.est.LCBi))
EPAMRHBi<-mean(abs((d.est.RHBi-RHBifit$Dxt)/d.est.RHBi))
EPAMCBDPo<-mean(abs((d.est.CBDPo-CBDPofit$Dxt)/d.est.CBDPo))

# ECM y EPAM Mujeres
d.est.LCBi1 <- fitted(LCBi1fit, type = "deaths")
d.est.RHBi1 <- fitted(RHBi1fit, type = "deaths")
d.est.CBDPo1 <- fitted(CBDPo1fit, type = "deaths")

ECMLCBi1<-sqrt(mean((d.est.LCBi1-LCBi1fit$Dxt)^2))
ECMRHBi1<-sqrt(mean((d.est.RHBi1-RHBi1fit$Dxt)^2))
ECMCBDPo1<-sqrt(mean((d.est.CBDPo1-CBDPo1fit$Dxt)^2))

EPAMLCBi1<-mean(abs((d.est.LCBi1-LCBi1fit$Dxt)/d.est.LCBi1))
EPAMRHBi1<-mean(abs((d.est.RHBi1-RHBi1fit$Dxt)/d.est.RHBi1))
EPAMCBDPo1<-mean(abs((d.est.CBDPo1-CBDPo1fit$Dxt)/d.est.CBDPo1))

```

```

# ECM y EPAM para LC original
qh<-as.vector(LC.gauss$fitted$y)
qh<-exp(qh)
qm<-as.vector(LC.gauss1$fitted$y)
qm<-exp(qm)

d.est.LC.gauss<-as.vector(CHLStMoMo$Ext[1:91,]*qh)
d.est.LC.gauss1<-as.vector(CHLStMoMo1$Ext[1:91,]*qm)

Dh<-as.vector(CHLStMoMo$Dxt[1:91,])
Dm<-as.vector(CHLStMoMo1$Dxt[1:91,])

ECMLCG<-sqrt(mean((d.est.LC.gauss-Dh)^2))
ECMLCG1<-sqrt(mean((d.est.LC.gauss1-Dm)^2))

EPAMLCG<-mean(abs((d.est.LC.gauss-Dh)/d.est.LC.gauss))
EPAMLCG1<-mean(abs((d.est.LC.gauss1-Dm)/d.est.LC.gauss1))

# pronóstico efecto periodo a 15 años para modelo Lee-Carter gaussiano.
library(forecast)
#hombres y mujeres
arima.LCG<-auto.arima(LC.gauss$kt,allowdrift=TRUE)
arima.LCG1<-auto.arima(LC.gauss1$kt,allowdrift=TRUE)

#gráficos
k<-forecast(arima.LCG,h=15)
k1<-forecast(arima.LCG1,h=15)
par(mfrow=c(1,2))
plot(k, ylim=c(-60,20), main = "Efecto periodo hombres")
plot(k1, ylim=c(-60,20), main = "Efecto periodo mujeres")

# pronóstico efecto periodo a 15 años para modelo Lee-Carter Binomial.
#hombres y mujeres
LCBifor<-forecast(LCBifit, h= 15, kt.method = "iarima", kt.order = NULL)
LCBi1for<-forecast(LCBi1fit, h= 15, kt.method = "iarima", kt.order = NULL)

#graficos
plot(LCBifor,only.kt = TRUE)
plot(LCBi1for,only.kt = TRUE)

# Pronósticos modelo Renshaw-Haberman

# ARIMA para el efecto de cohorte hombres y mujeres
arima.RHG<-auto.arima(RHBifit$gc,allowdrift=TRUE)
arima.RHG1<-auto.arima(RHBi1fit$gc,allowdrift=TRUE)

#hombres y mujeres

```

```

RHBifor<-forecast(RHBifit, h= 15, kt.method = "iarima", kt.order = NULL,
gc.order = c(2,2,2))
RHBi1for<-forecast(RHBi1fit, h= 15, kt.method = "iarima", kt.order = NULL,
gc.order = c(0,2,2))

# gráfico pronóstico efecto periodo y efecto cohorte a 15 años para el
# modelo Renshaw-Haberman con distribución Binomial.
plot(RHBifor,only.kt = TRUE)
plot(RHBifor,only.gc = TRUE)
plot(RHBi1for,only.kt = TRUE)
plot(RHBi1for,only.gc = TRUE)

# comparación de pronósticos con datos INE 2009-2012, 0 a 89 años
# con las tasas de mortalidad hombres y mujeres
dine <- read.table("dINE.txt",header=TRUE,skip=0)
dine1 <- read.table("dINE1.txt",header=TRUE,skip=0)

#ECM y EPAM LC Binomial hombres y mujeres
q.for.LCBi <-LCBifor$rates[0:90,1:4]
ECMLCbiq<-sqrt(mean((q.for.LCBi-dine$q)^2))
EPAMLCbiq<-mean(abs((q.for.LCBi-dine$q)/q.for.LCBi))
q.for.LCbi1 <-LCBi1for$rates[0:90,1:4]
ECMLCbi1q<-sqrt(mean((q.for.LCbi1-dine1$q)^2))
EPAMLCbi1q<-mean(abs((q.for.LCbi1-dine1$q)/q.for.LCbi1))

#ECM y EPAM RH Binomial hombres y mujeres
q.for.RHBi<-RHBifor$rates[0:90,1:4]
ECMRHbiq<-sqrt(mean((q.for.RHBi-dine$q)^2))
EPAMRHbiq<-mean(abs((q.for.RHBi-dine$q)/q.for.RHBi))
q.for.RHbi1 <-RHBi1for$rates[0:90,1:4]
ECMRHbi1q<-sqrt(mean((q.for.RHbi1-dine1$q)^2))
EPAMRHbi1q<-mean(abs((q.for.RHbi1-dine1$q)/q.for.RHbi1))

#ECM y EPAM LC original hombres y mujeres
Kpro<-k$mean[1:4]
a1<-as.vector(LC.gauss$ax+LC.gauss$bx*Kpro[1])
a1<-a1[1:90]
a2<-as.vector(LC.gauss$ax+LC.gauss$bx*Kpro[2])
a2<-a2[1:90]
a3<-as.vector(LC.gauss$ax+LC.gauss$bx*Kpro[3])
a3<-a3[1:90]
a4<-as.vector(LC.gauss$ax+LC.gauss$bx*Kpro[4])
a4<-a4[1:90]
a<-c(a1,a2,a3,a4)
q.LCG<-as.vector(exp(a))
ECMgaussq<-sqrt(mean((q.LCG-dine$q)^2))
EPAMgaussq<-mean(abs((q.LCG-dine$q)/q.LCG))
Kpro1<-k1$mean[1:4]

```

```

a11<-as.vector(LC.gauss1$ax+LC.gauss1$bx*Kpro1[1])
a11<-a11[1:90]
a21<-as.vector(LC.gauss1$ax+LC.gauss1$bx*Kpro1[2])
a21<-a21[1:90]
a31<-as.vector(LC.gauss1$ax+LC.gauss1$bx*Kpro1[3])
a31<-a31[1:90]
a41<-as.vector(LC.gauss1$ax+LC.gauss1$bx*Kpro1[4])
a41<-a41[1:90]
a1<-c(a11,a21,a31,a41)
q.LCG1<-as.vector(exp(a1))
ECMgauss1q<-sqrt(mean((q.LCG1-dine1$q)^2))
EPAMgauss1q<-mean(abs((q.LCG1-dine1$q)/q.LCG1))

# pronósticos tasas de mortalidad LC Binomial hombres puntual, low y up
q.LCBi.65<-c()
for (i in 1:15 ){
  q.LCBi.65[i] <-as.numeric(LCBifor$rates[65+i,i])
}

l<-as.vector(LCBifor$kt.f$lower[, ,2])
q.LCBi.65.L<- c()
for (i in 1:15 ){
  q.LCBi.65.L[i] <- as.numeric(LCBifit$ax[65+i]+LCBifit$bx[65+i]*l[i])
}
q.LCBi.65.L<-exp(q.LCBi.65.L)

u<-as.vector(LCBifor$kt.f$upper[, ,2])
q.LCBi.65.U<- c()
for (i in 1:15 ){
  q.LCBi.65.U[i] <- as.numeric(LCBifit$ax[65+i]+LCBifit$bx[65+i]*u[i])
}
q.LCBi.65.U<-exp(q.LCBi.65.U)

c2<-round(q.LCBi.65,4)
c3<-round(q.LCBi.65.L,4)
c4<-round(q.LCBi.65.U,4)

# pronósticos tasas de mortalidad RH Binomial hombres puntual, low y up
q.RHBi.65<-c()
for (i in 1:15 ){
  q.RHBi.65[i] <-as.numeric(RHBifor$rates[65+i,i])
}

lk<-as.vector(RHBifor$kt.f$lower[, ,2])
q.RHBi.65.L<- c()
for (i in 1:15 ){
  q.RHBi.65.L[i] <- as.numeric(RHBifit$ax[65+i]+RHBifit$bx[65+i]*lk[i]+
RHBifit$gc[43])

```

```

}
q.RHBi.65.L<-exp(q.RHBi.65.L)

lku<-as.vector(RHBifor$kt.f$upper[,2])
q.RHBi.65.U<- c()
for (i in 1:15 ){
  q.RHBi.65.U[i] <- as.numeric(RHBifit$ax[65+i]+RHBifit$bx[65+i]*lku[i]+
RHBifit$gc[43])
}
q.RHBi.65.U<-exp(q.RHBi.65.U)

c5<-round(q.RHBi.65,4)
c6<-round(q.RHBi.65.L,4)
c7<-round(q.RHBi.65.U,4)

# tasas de moratlidad LC gaussiano hombres puntual, baja y alta
or<-as.vector(k$mean)
q.LCG.65.M<- c()
for (i in 1:15 ){
  q.LCG.65.M[i] <- as.numeric(LC.gauss$ax[65+i]+LC.gauss$bx[65+i]*or[i])
}
q.LCG.65.M<-exp(q.LCG.65.M)

orb<-as.vector(k$lower[,2])
q.LCG.65.L<- c()
for (i in 1:15 ){
  q.LCG.65.L[i] <- as.numeric(LC.gauss$ax[65+i]+LC.gauss$bx[65+i]*orb[i])
}
q.LCG.65.L<-exp(q.LCG.65.L)

oru<-as.vector(k$upper[,2])
q.LCG.65.U<- c()
for (i in 1:15 ){
  q.LCG.65.U[i] <- as.numeric(LC.gauss$ax[65+i]+LC.gauss$bx[65+i]*oru[i])
}
q.LCG.65.U<-exp(q.LCG.65.U)

c8<-round(q.LCG.65.M,4)
c9<-round(q.LCG.65.L,4)
c10<-round(q.LCG.65.U,4)

# datos Superintendencia, M95 H, tasas de mortalidad hombres
M95 <- read.table("M95.txt",header=TRUE,skip=0)
qxh<-M95$qxH
c11<-round(qxh,4)

# matriz de todos los datos: tabla de mortalidad hombres
c1<-65:79
datos.H65<-cbind(c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,c10,c11)

```

```

datos.H65

#tabla
library(knitr)
kable( datos.H65, caption = "escenario 1"
      , align = c('c', 'c', 'c', 'c', 'c', 'c','c', 'c', 'c', 'c','c')
      , col.names = c("Edad","LCB","LCBL","LCBU","RHB","RHL","RHB",
"LCG","LCGL","LCGU","M95H")
      , digits = 3
      , format.args = list( decimal.mark = ",")
)

# gráfico tasas de mortalidad para un hombre que en 2009 tiene 65 años
# según modelos estimados y la tabla M95H
plot(x=c1, y=c2, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",col="blue4",
ylim=c(0.016,0.08))
par(new=TRUE)
plot(x=c1, y=c3, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",col="blue1",
ylim=c(0.016,0.08))
par(new=TRUE)
plot(x=c1, y=c4, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",col="blue",
ylim=c(0.016,0.08))
par(new=TRUE)
plot(x=c1, y=c11, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",col="black",
ylim=c(0.016,0.08))
#legend("topleft" , c("LCB","LCBL","LCBU","M95H"),cex=0.8,
col=c("blue","red","green","black"),lty=1)
par(new=TRUE)
plot(x=c1, y=c5, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",col="green4",
ylim=c(0.016,0.08))
par(new=TRUE)
plot(x=c1, y=c6, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",col="green1",
ylim=c(0.016,0.08))
par(new=TRUE)
plot(x=c1, y=c7, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",col="green",
ylim=c(0.016,0.08))
par(new=TRUE)
#plot(x=c1, y=c11, main="RH", xlab="Age",ylab="qx",type="l",col="black",
ylim=c(0.0165,0.0795))
#legend("topleft" , c("RH","RHL","RHU","M95H"),cex=0.8,
col=c("blue","red","green","black"),lty=1)
plot(x=c1, y=c8, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",col="red4",
ylim=c(0.016,0.08))
par(new=TRUE)
plot(x=c1, y=c9, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",col="red1",
ylim=c(0.016,0.08))
par(new=TRUE)
plot(x=c1, y=c10, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",col="red",
ylim=c(0.016,0.08))

```

```

par(new=TRUE)
#plot(x=c1, y=c11, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",col="black",
ylim=c(0.0165,0.0795))
legend("topleft",c("LCB","LCBL","LCBU","M95H","RH","RHL","RHU","LCG","LCGL","LCGU"),cex=0.8,
col=c("blue4","blue1","blue","black","green4","green1","green","red4","red1","red"),lty=1)

# pronósticos tasas de mortalidad LC Binomial mujeres puntual, low y up
q.LCBi1.65<-c()
for (i in 1:15 ){
  q.LCBi1.65[i] <-as.numeric(LCBi1for$rates[65+i,i])
}

l1<-as.vector(LCBi1for$kt.f$lower[,2])
q.LCBi1.65.L<- c()
for (i in 1:15 ){
  q.LCBi1.65.L[i] <- as.numeric(LCBi1fit$ax[65+i]+LCBi1fit$bx[65+i]*l1[i])
}
q.LCBi1.65.L<-exp(q.LCBi1.65.L)

u1<-as.vector(LCBi1for$kt.f$upper[,2])
q.LCBi1.65.U<- c()
for (i in 1:15 ){
  q.LCBi1.65.U[i] <- as.numeric(LCBi1fit$ax[65+i]+LCBi1fit$bx[65+i]*u1[i])
}
q.LCBi1.65.U<-exp(q.LCBi1.65.U)

c21<-round(q.LCBi1.65,4)
c31<-round(q.LCBi1.65.L,4)
c41<-round(q.LCBi1.65.U,4)

# pronósticos tasas de mortalidad RH Binomial mujeres puntual, low y up
q.RHBi1.65<-c()
for (i in 1:15 ){
  q.RHBi1.65[i] <-as.numeric(RHBi1for$rates[65+i,i])
}

lk1<-as.vector(RHBi1for$kt.f$lower[,2])

q.RHBi1.65.L<- c()
for (i in 1:15 ){
  q.RHBi1.65.L[i] <- as.numeric(RHBi1fit$ax[65+i]+RHBi1fit$bx[65+i]*lk1[i]
+RHBi1fit$gc[43])
}
q.RHBi1.65.L<-exp(q.RHBi1.65.L)

lku1<-as.vector(RHBi1for$kt.f$upper[,2])
q.RHBi1.65.U<- c()
for (i in 1:15 ){
  q.RHBi1.65.U[i] <- as.numeric(RHBi1fit$ax[65+i]+RHBi1fit$bx[65+i]*lku1[i]

```



```

+RHBi1fit$gc[43])
}
q.RHBi1.65.U<-exp(q.RHBi1.65.U)

c51<-round(q.RHBi1.65,4)
c61<-round(q.RHBi1.65.L,4)
c71<-round(q.RHBi1.65.U,4)

# pronósticos tasas de mortalidad LC gaussiano mujeres puntual, low y up
or1<-as.vector(k1$mean)
q.LCG1.65.M<- c()
for (i in 1:15 ){
q.LCG1.65.M[i] <- as.numeric(LC.gauss1$ax[65+i]+LC.gauss1$bx[65+i]*or1[i])
}
q.LCG1.65.M<-exp(q.LCG1.65.M)

orb1<-as.vector(k1$lower[,2])
q.LCG1.65.L<- c()
for (i in 1:15 ){
q.LCG1.65.L[i] <- as.numeric(LC.gauss1$ax[65+i]+LC.gauss1$bx[65+i]*orb1[i])
}
q.LCG1.65.L<-exp(q.LCG1.65.L)

oru1<-as.vector(k1$upper[,2])
q.LCG1.65.U<- c()
for (i in 1:15 ){
q.LCG1.65.U[i] <- as.numeric(LC.gauss1$ax[65+i]+LC.gauss1$bx[65+i]*oru1[i])
}
q.LCG1.65.U<-exp(q.LCG1.65.U)

c81<-round(q.LCG1.65.M,4)
c91<-round(q.LCG1.65.L,4)
c101<-round(q.LCG1.65.U,4)

# datos Superintendencia, M95 M, tasas de mortalidad mujeres
qxm<-M95$qxm
c111<-round(qxm,4)

# matriz de todos los datos: tabla de mortalidad mujeres
datos.M65<-cbind(c1,c21,c31,c41,c51,c61,c71,c81,c91,c101,c111)
datos.M65

#tabla
library(knitr)
kable( datos.M65, caption = "escenario 2"
, align = c('c', 'c', 'c', 'c', 'c', 'c', 'c', 'c', 'c', 'c', 'c')
, col.names = c("Edad", "LCB", "LCBL", "LCBU", "RHB", "RHBL", "RHBU",
"LCG", "LCGL", "LCGU", "M95M")
, digits = 3

```

```

, format.args = list( decimal.mark = ",")

# gráfico tasas de mortalidad para una mujer que en 2009 tiene 65 años
# según modelos estimados y la tabla M95M
plot(x=c1, y=c21, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",col="blue4",
ylim=c(0.009,0.045))
par(new=TRUE)
plot(x=c1, y=c31, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",col="blue1",
ylim=c(0.009,0.045))
par(new=TRUE)
plot(x=c1, y=c41, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",col="blue",
ylim=c(0.009,0.045))
par(new=TRUE)
plot(x=c1, y=c111, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",col="black",
ylim=c(0.009,0.045))
#legend("topleft" , c("LCB","LCBL","LCBU","M95H"),cex=0.8,
col=c("blue","red","green","black"),lty=1)
par(new=TRUE)
plot(x=c1, y=c51, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",
col="green4", ylim=c(0.009,0.045))
par(new=TRUE)
plot(x=c1, y=c61, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",
col="green1",ylim=c(0.009,0.045))
par(new=TRUE)
plot(x=c1, y=c71, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",
col="green",ylim=c(0.009,0.045))
par(new=TRUE)
plot(x=c1, y=c11, main="RH", xlab="Age",ylab="qx",type="l",col="black",
ylim=c(0.0165,0.0795))
legend("topleft" , c("RH","RHL","RHU","M95H"),cex=0.8,
col=c("blue","red","green","black"),lty=1)
plot(x=c1, y=c81, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",
col="red4", ylim=c(0.009,0.045))
par(new=TRUE)
plot(x=c1, y=c91, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",
col="red1",ylim=c(0.009,0.045))
par(new=TRUE)
plot(x=c1, y=c101, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",col="red",
ylim=c(0.009,0.045))
par(new=TRUE)
plot(x=c1, y=c11, main="qx", xlab="Age",ylab="qx",type="l",col="black",
ylim=c(0.0165,0.0795))
legend("topleft",c("LCB","LCBL","LCBU","M95M","RH","RHL","RHU","LCG","LCGL","LCGU"),cex=0.8,
col=c("blue4","blue1","blue","black","green4","green1","green","red4","red1","red"),lty=1)

# c2 son las q para LCB, para el cálculo de la prima, llamo d2 a las xPy
# considero que la cuantía C es de 60 mil euros, el interés I es de 2%
d2<-cumprod(1-c2)
d2<-d2[-15]

```

```

d2<-c(1,d2)
d2<-round(d2,4)
vaa2<-c()
for(i in 1:15){
  vaa2[i]<-(1.02)^(-i)*d2[i]*c2[i]
}
VAAs2<-round(60000*sum(vaa2),3)

# c3 son las q para LCB low, para el cálculo de la prima, llamo d3 a las xPy
d3<-cumprod(1-c3)
d3<-d3[-15]
d3<-c(1,d3)
d3<-round(d3,4)
vaa3<-c()
for(i in 1:15){
  vaa3[i]<-(1.02)^(-i)*d3[i]*c3[i]
}
VAAs3<-round(60000*sum(vaa3),3)

# c4 son las q para LCB up, para el cálculo de la prima, llamo d4 a las xPy
d4<-cumprod(1-c4)
d4<-d4[-15]
d4<-c(1,d4)
d4<-round(d4,4)
vaa4<-c()
for(i in 1:15){
  vaa4[i]<-(1.02)^(-i)*d4[i]*c4[i]
}
VAAs4<-round(60000*sum(vaa4),3)

# c5 son las q para RH, para el cálculo de la prima, llamo d5 a las xPy
d5<-cumprod(1-c5)
d5<-d5[-15]
d5<-c(1,d5)
d5<-round(d5,4)
vaa5<-c()
for(i in 1:15){
  vaa5[i]<-(1.02)^(-i)*d5[i]*c5[i]
}
VAAs5<-round(60000*sum(vaa5),3)

# c6 son las q para RH low, para el cálculo de la prima, llamo d6 a las xPy
d6<-cumprod(1-c6)
d6<-d6[-15]
d6<-c(1,d6)
d6<-round(d6,4)
vaa6<-c()
for(i in 1:15){
  vaa6[i]<-(1.02)^(-i)*d6[i]*c6[i]
}

```

```

}
VAAs6<-round(60000*sum(vaa6),3)

# c7 son las q para RH up, para el cálculo de la prima, llamo d7 a las xPy
d7<-cumprod(1-c7)
d7<-d7[-15]
d7<-c(1,d7)
d7<-round(d7,4)
vaa7<-c()
for(i in 1:15){
  vaa7[i]<-(1.02)^(-i)*d7[i]*c7[i]
}
VAAs7<-round(60000*sum(vaa7),3)

# c8 son las q para LCG, para el cálculo de la prima, llamo d8 a las xPy
d8<-cumprod(1-c8)
d8<-d8[-15]
d8<-c(1,d8)
d8<-round(d8,4)
vaa8<-c()
for(i in 1:15){
  vaa8[i]<-(1.02)^(-i)*d8[i]*c8[i]
}
VAAs8<-round(60000*sum(vaa8),3)

# c9 son las q para LCG low, para el cálculo de la prima, llamo d9 a las xPy
d9<-cumprod(1-c9)
d9<-d9[-15]
d9<-c(1,d9)
d9<-round(d9,4)
vaa9<-c()
for(i in 1:15){
  vaa9[i]<-(1.02)^(-i)*d9[i]*c9[i]
}
VAAs9<-round(60000*sum(vaa9),3)

# c10 son las q para LCG up, para el cálculo de la prima, llamo d10 a las xPy
d10<-cumprod(1-c10)
d10<-d10[-15]
d10<-c(1,d10)
d10<-round(d10,4)
vaa10<-c()
for(i in 1:15){
  vaa10[i]<-(1.02)^(-i)*d10[i]*c10[i]
}
VAAs10<-round(60000*sum(vaa10),3)

#mujeres

```

```

# c21 son las q para LCB, para el cálculo de la prima, llamo d21 a las xPy
d21<-cumprod(1-c21)
d21<-d21[-15]
d21<-c(1,d21)
d21<-round(d21,4)
vaa21<-c()
for(i in 1:15){
  vaa21[i]<-(1.02)^(-i)*d21[i]*c21[i]
}
VAAs21<-round(60000*sum(vaa21),3)

# c31 son las q para LCB low, para el cálculo de la prima, llamo d31 a las xPy
d31<-cumprod(1-c31)
d31<-d31[-15]
d31<-c(1,d31)
d31<-round(d31,4)
vaa31<-c()
for(i in 1:15){
  vaa31[i]<-(1.02)^(-i)*d31[i]*c31[i]
}
VAAs31<-round(60000*sum(vaa31),3)

# c41 son las q para LCB up, para el cálculo de la prima, llamo d41 a las xPy
d41<-cumprod(1-c41)
d41<-d41[-15]
d41<-c(1,d41)
d41<-round(d41,4)
vaa41<-c()
for(i in 1:15){
  vaa41[i]<-(1.02)^(-i)*d41[i]*c41[i]
}
VAAs41<-round(60000*sum(vaa41),3)

# c51 son las q para RH, para el cálculo de la prima, llamo d51 a las xPy.
d51<-cumprod(1-c51)
d51<-d51[-15]
d51<-c(1,d51)
d51<-round(d51,4)
vaa51<-c()
for(i in 1:15){
  vaa51[i]<-(1.02)^(-i)*d51[i]*c51[i]
}
VAAs51<-round(60000*sum(vaa51),3)

# c61 son las q para RH low, para el cálculo de la prima, llamo d61 a las xPy.
d61<-cumprod(1-c61)
d61<-d61[-15]
d61<-c(1,d61)
d61<-round(d61,4)

```

```

vaa61<-c()
for(i in 1:15){
  vaa61[i]<-(1.02)^(-i)*d61[i]*c61[i]
}
VAAs61<-round(60000*sum(vaa61),3)

# c71 son las q para RH up, para el cálculo de la prima, llamo d71 a las xPy.
d71<-cumprod(1-c71)
d71<-d71[-15]
d71<-c(1,d71)
d71<-round(d71,4)
vaa71<-c()
for(i in 1:15){
  vaa71[i]<-(1.02)^(-i)*d71[i]*c71[i]
}
VAAs71<-round(60000*sum(vaa71),3)

# c81 son las q para LCG, para el cálculo de la prima, llamo d81 a las xPy.
d81<-cumprod(1-c81)
d81<-d81[-15]
d81<-c(1,d81)
d81<-round(d81,4)
vaa81<-c()
for(i in 1:15){
  vaa81[i]<-(1.02)^(-i)*d81[i]*c81[i]
}
VAAs81<-round(60000*sum(vaa81),3)

# c91 son las q para LCG low, para el cálculo de la prima, llamo d91 a las xPy.
d91<-cumprod(1-c91)
d91<-d91[-15]
d91<-c(1,d91)
d91<-round(d91,4)
vaa91<-c()
for(i in 1:15){
  vaa91[i]<-(1.02)^(-i)*d91[i]*c91[i]
}
VAAs91<-round(60000*sum(vaa91),3)

# c101 son las q para LCG up, para el cálculo de la prima, llamo d101 a las xPy.
d101<-cumprod(1-c101)
d101<-d101[-15]
d101<-c(1,d101)
d101<-round(d101,4)
vaa101<-c()
for(i in 1:15){
  vaa101[i]<-(1.02)^(-i)*d101[i]*c101[i]
}
VAAs101<-round(60000*sum(vaa101),3)

```

```

# c11 son las q para M95-H, para el cálculo de la prima, llamo d11 a las xPy.
d11<-cumprod(1-c11)
d11<-d11[-15]
d11<-c(1,d11)
d11<-round(d11,4)
vaa11<-c()
for(i in 1:15){
  vaa11[i]<-(1.02)^(-i)*d11[i]*c11[i]
}
VAAs11<-round(60000*sum(vaa11),3)

# c111 son las q para M95-M, para el cálculo de la prima, llamo d111 a las xPy.
d111<-cumprod(1-c111)
d111<-d111[-15]
d111<-c(1,d111)
d111<-round(d111,4)
vaa111<-c()
for(i in 1:15){
  vaa111[i]<-(1.02)^(-i)*d111[i]*c111[i]
}
VAAs111<-round(60000*sum(vaa111),3)

escenario1<-c(VAAs2,VAAs3,VAAs4,VAAs5,VAAs6,VAAs7,VAAs8,VAAs9,
VAAs10,VAAs11)
escenario2<-c(VAAs21,VAAs31,VAAs41,VAAs51,VAAs61,VAAs71,VAAs81,
VAAs91,VAAs101,VAAs111)
modelos<-c("Lee Carter Bin.", "Lee-Carter B-Low", "Lee-Carter B-Up", "Renshaw-Haberman",
"Renshaw-Haberman-Low", "Renshaw-Haberman-Up", "Lee-Carter Gauss.", "Lee-CarterG-Low",
"Lee-Carter G-Up", "M95")
prima<-cbind(modelos,escenario1,escenario2)

library(knitr)
kable( prima, caption = "Valor prima pura"
, align = c('l','c','c')
, col.names = c("Modelos", "Escenario 1", "Escenario 2")
, digits = 3
, format.args = list( decimal.mark = "," )
)

```